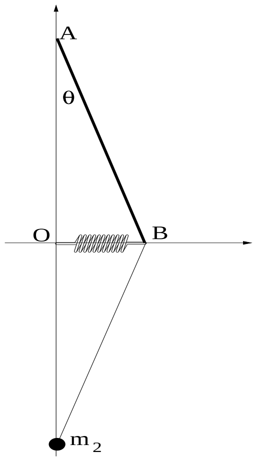
Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 1/07/09

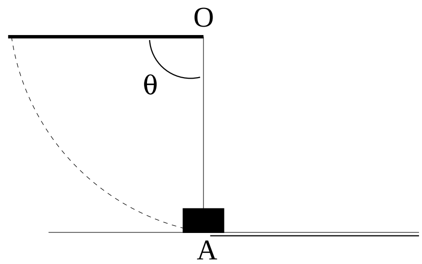
Esercizio 1

Un sistema meccanico è costituito da un'asta rigida, sottile ed omogenea di lunghezza 2l (l=1 m) e massa m_1=20 kg. L'estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida verticale e l'estremo B lungo una guida orizzontale. In B è attaccata una fune inestensibile di lunghezza 2l che ha l'altro capo connesso con un punto materiale di massa m_2, vincolato a scorrere senza attrito sulla stessa guida verticale su cui scorre A. In B inoltre è applicata una molla di costante elastica k=100 N/m, vincolata a restare orizzontale e ancorata all'altro estremo al punto fisso O. La molla è a riposo nella configurazione in cui θ=30°. Si calcoli il valore di m_2 affinchè il sistema sia in equilibrio nella configurazione θ=45°.



Esercizio 2

Un'asta rigida sottile ed omogenea di massa M=3 kg e lunghezza l=2 m è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il punto fisso O. L'asta, lasciata libera di muoversi a partire dalla configurazione θ=90°, urta in modo completamente elastico una particella puntiforme situata sulla verticale, nel punto A. Dopo l'urto, l'asta rimane in quiete. Si calcoli la massa della particella e la sua velocità immediatamente dopo l'urto. Successivamente, la particella percorre un tratto rettilineo su una guida orizzontale scabra, caratterizzata da un coefficente di attrito dinamico μ_d=0.7. Calcolare la distanza percorsa dalla massa dal punto A fino al punto in cui si arresta.



Esercizio 3

In una macchina termica, n = 2.2 moli di gas biatomico eseguono un ciclo reversibile caratterizzato da un'espansione isoterma AB , da un'espansione adiabatica BC, da una compressione isobara CD e da una trasformazione isocora DA. Nel punto A si ha P_A = 6.1 10^5 Pa e T_A = 530 K. Il volume in B è doppio rispetto al volume in A. La pressione in D è P_D = 10 ^{5} Pa. Si rappresenti graficamente il ciclo nel piano PV. Si calcoli il lavoro ed il calore scambiato in ciascuna trasformazione, verificando inoltre che la variazione complessiva di entropia nel ciclo sia nulla. Si calcoli infine il rendimento del ciclo.

Soluzione della prova scritta di Fisica 1
del 1/07/2009

1 Quesito

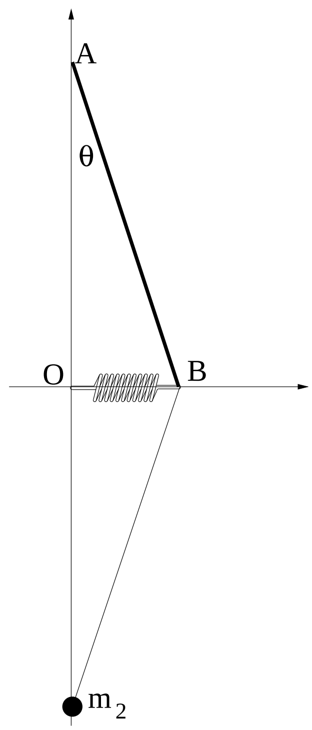


Figura 1: Quesito 1

La soluzione del primo quesito si ricava imponendo che l'energia potenziale complessiva associata al sistema meccanico abbia derivata nulla (condizione di equilibrio) nella configurazione in cui l'angolo θ=45°. L'energia potenziale complessiva è:

$$U(\theta) = m_1 glcos\theta + \frac{1}{2}k4l^2(sen\theta - sen\theta_0)^2 - 2m_2 glcos\theta \tag{1}$$

Il primo termine rappresenta il contributo gravitazionale associato alla sbarra, il secondo quello associato alla forza elastica esercitata dalla molla, il terzo quello gravitazionale associato alla massa puntiforme m_2. (Si è assunto come 0 dell'enegia potenziale gravitazionale il livello corrispondente ad y=0 rispetto ad un sistema di riferimento con asse x lungo il segmento orizzontale OB ed asse y verticale). Il termine associato alla forza elastica è ricavato sfruttando l'informazione che la lunghezza a riposo della molla si ha nella configurazione θ_0=30° ed ha valore $2lsen\theta_0$. L'allungamento della molla per un generico angolo θ vale quindi $2l(sen\theta - sen\theta_0)$. Derivando rispetto a θ l'espressione in eq.1, si ottiene:

$$\frac{dU}{d\theta} = -m_1 glsen\theta + 4kl^2(sen\theta - sen\theta_0)cos\theta + 2m_2 glsen\theta \tag{2}$$

Imponendo che $\frac{dU}{d\theta}$=0 in θ=θ_{eq}=45°, e risolvendo rispetto ad m_2, si ottiene

$$m_2 = \frac{m_1}{2} - \frac{2kl}{gtan\theta_{eq}}(sen\theta_{eq} - sen\theta_0) \tag{3}$$

Numericamente, m_2=5.8 kg.
La soluzione del quesito si può ottenere equivalentemente imponendo che la risultante delle forze esterne applicate alla sbarra ed alla massa m_2 sia nulla (vedi figure 1.)

$$\begin{array}{ll} sbarra,\ lungo\ x & N_A - 2kl(sen\theta - sen\theta_0) - Tsen\theta = 0 \\ sbarra,\ lungo\ y & N_B - m_1 g - Tcos\theta = 0 \\ massa,\ lungo\ x & N_C + Tsen\theta = 0 \\ massa,\ lungo\ y & Tcos\theta - m_2 g = 0 \end{array} \tag{4}$$

Si richiede inoltre che la risultante dei momenti delle forze applicate alla sbarra (ad esempio calcolati rispetto al punto A) sia nulla:

$$m_1 glsen\theta + 2lk(sen\theta - sen\theta_0)cos\theta + 2lTsen(2\theta) - 2lN_B sen\theta = 0 \tag{5}$$

Ricavando ad esempio T ed N_B dall'equazione 4 e sostituendo nell'equazione 5 si ricava, per $\theta = \theta_{eq}$ il valore di m_2, identico a quello dato nell'equazione 3.

2 Quesito

Durante il moto della sbarra dalla configurazione con θ=90° a quella con θ=0°, l'energia meccanica si conserva (i vincoli sono lisci). Assumendo che il livello di zero dell'energia potenziale gravitazionale coincida con la quota

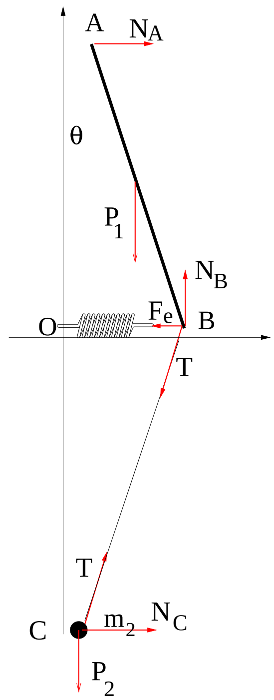


Figura 2: Diagramma delle forze applicate alla sbarra ed alla massa m_2

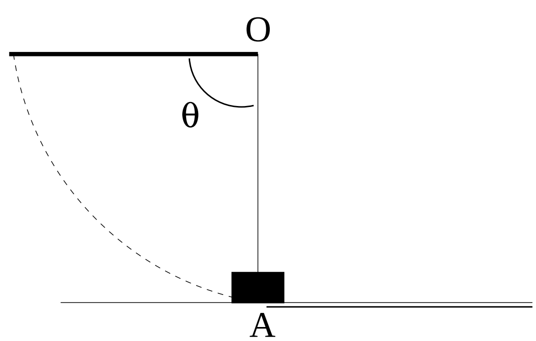


Figura 3: Quesito 2

del punto A, si ha, considerando la variazione di quota del centro di massa della sbarretta nel passaggio da una configurazione all'altra:

$$Mgl = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}Mgl \tag{6}$$

in cui ω_0 rappresenta il modulo della velocità angolare della sbarra in θ=0° (quindi subito prima dell'urto) ed $I = Ml^2/3$ è il momento di inerzia della sbarra rispetto ad un asse perpendicolare al piano del foglio e passante per O. Dall'eq.6, segue che:

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{l} \tag{7}$$

In corrispondenza di θ=0°, la sbarra urta una particella puntiforme posta in A. Durante l'urto, 1) l'energia cinetica del sistema sbarra+particella si conserva poichè si tratta di un urto completamente elastico 2) la quantità di moto del sistema non si conserva a causa della presenza della reazione vincolare di natura impulsiva applicata alla sbarra in O 3) il momento angolare del sistema calcolato rispetto ad O si conserva poichè il momento delle forze esterne rispetto ad O è nullo. Segue che:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 & conservazione \;\; dell'energia \;\; cinetica \\ I\omega_0 = mlv_0 & conservazione \;\; del \;\; momento \;\; angolare \end{cases} \tag{8}$$

Elevando al quadrato la seconda equazione e dividendo membro a membro, si ricava:

$$m = \frac{I}{l^2} = \frac{1}{3}M \tag{9}$$

Sostituendo questo valore ad esempio nella seconda equazione del sistema 8 e sfruttando l'eq.7 si ottiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{MgI}{m^2 l}} = \sqrt{3lg} \tag{10}$$

Numericamente m=1 kg, v_0=7.6 m/s.
La risposta all'ultima domanda del quesito si ottiene considerando che nel tratto percorso dalla particella subito dopo l'urto, tutta l'energia inizialmente a disposizione viene dissipata a causa dell'azione della forza di attrito eserciata dal piano scabro ($|F_{attr}| = \mu_d |N| = \mu_d mg$, in cui N è la reazione normale esercitata dal piano sulla particella durante il moto sulla guida orizzontale). Eguagliando quindi l'energia della particella subito dopo l'urto al lavoro fatto dalla forza di attrito lungo il cammino percorso prima di arrestarsi si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_d mgd \tag{11}$$

da cui

$$d = \frac{3l}{2\mu_d} \tag{12}$$

Numericamente, $d = 4.3$ m.

3 Quesito

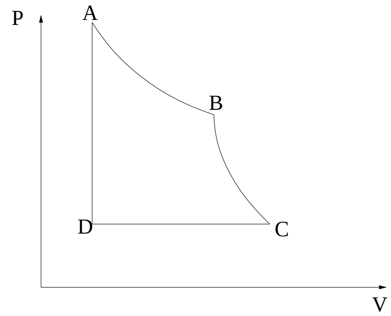


Figura 4: Quesito 3

La rappresentazione grafica del ciclo termodinamico proposto è mostrata in figura 4. Si procede innanzi tutto con la determinazione delle variabili di stato termodinamiche (pressione, volume e temperatura) per gli stati A,B,C e D. Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti PV=nRT, si determinano rapidamente V_A e P_B:

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{nRT_A}{P_A} = \ 0.016\ m^3 \\ P_B &= \frac{nRT_B}{V_B} = P_A/2 \end{aligned} \tag{13}$$

Lungo la trasformazione adiabatica BC vale PV^γ=cost, ciò permette di

	P	V	T
A	$6.1\ 10^5$ Pa	0.016 m^3	530 K
B	$P_A/2$	2 V_A	T_A
C	10^5 Pa	0.071 m^3	388 K
D	P_C	V_A	87.5 K

Tabella 1: Sommario delle variabili termodinamiche nei 4 stati del ciclo

calcolare V_C:

$$V_C = \left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \ 0.071\ m^3 \tag{14}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricavano poi T_C=388 K e T_D=87.5 K. In tabella è riportato un sommario delle variabili termodinamiche negli stati A,B,C e D.

- Trasformazione AB, isoterma:

$$L_{AB} = Q_{AB} = \int PdV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A ln\frac{V_B}{V_A} \ = \ 6716\ J$$
$$S_{AB} = \int \frac{dQ}{T} = nR \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRln\frac{V_B}{V_A} \ = \ 13\ J/K$$

- Trasformazione BC, adiabatica:

$$L_{BC} = -\Delta U = nc_V(T_B - T_C) = \ 6490\ J$$
$$Q_{BC} = 0\ J$$
$$S_{BC} = 0\ J/K$$

- Trasformazione CD, isobara:

$$L_{CD} = P_C(V_D - V_C) = \ -5500\ J$$
$$Q_{CD} = nc_P(T_D - T_C) = -19228\ J$$
$$S_{CD} = nc_P \int_{T_C}^{T_D} \frac{dT}{T} = nc_P ln\frac{T_D}{T_C} = -95.3\ J/K$$

- Trasformazione DA, isocora:

$$L_{DA} = 0\ J$$
$$Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) = 20224\ J$$
$$S_{DA} = nc_V \int_{T_D}^{T_A} \frac{dT}{T} = nc_V ln\frac{T_A}{T_D} = 82.3\ J/K$$

La variazione di entropia nel ciclo termodinamico risulta nulla, come deve essere in un ciclo cosituito da trasformazioni reversibili:

$$S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DA} \sim= 0\ J/K$$

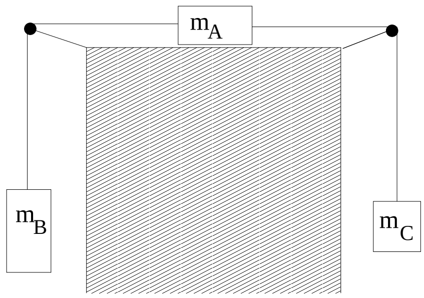
Il rendimento del ciclo termodinamico vale:

$$\eta = \frac{L_{tot}}{|Q_{ass}|} \ \sim 0.29 \qquad (29\%)$$

Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 2/03/10

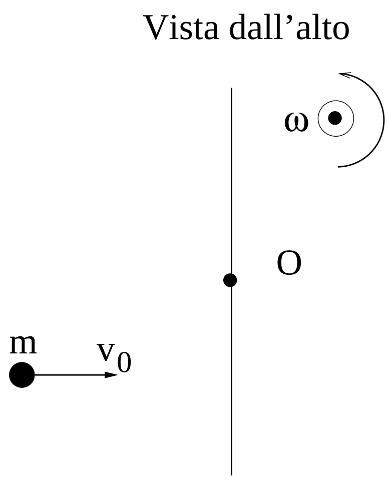
Esercizio 1

Un corpo A di massa m_A = 2kg è posto su un piano orizzontale liscio, ed è collegato tramite due funi inestensibili che passano attraverso due pulegge di massa e attrito trascurabili a due corpi appesi B e C di massa rispettivamente m_B = 1kg e m_C = 4kg. Il sistema è inizialmente in quiete. Determinare 1) l'accelerazione della massa m_A, assumendo che non vi sia attrito tra questa e il piano su cui appoggia; 2) il minimo coefficiente di attrito statico fra m_A e piano necessario affinchè il sistema resti in quiete.



Esercizio 2

Una sbarra omogenea di lunghezza l=2m e massa M=3kg, giacente su un piano orizzontale liscio, può ruotare attorno ad un asse verticale passante per il suo centro fisso O. In O è applicato un momento frenante di modulo costante τ = 10 mNm. Una massa puntiforme di masa m = 100 g e velocità 30m/s urta la sbarra in modo completamente anelastico in corrispondenza di un punto posto ad una distanza (1/4)l da O. La direzione della velocità durante l'urto è ortogonale alla sbarra e l'urto si può supporre istantaneo. Calcolare la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto ed il numero di giri che compie la sbarra prima di arrestarsi.



Esercizio 3

2 moli di un gas perfetto biatomico eseguono un ciclo reversibile composto da una trasformazione isocora AB, un'espansione adiabatica BC, ed una trasformazione isoterma CA. Si rappresenti il ciclo descritto nel piano PV e si determini: 1) il lavoro fatto dal gas in ogni trasformazione; 2) il calore scambiato; 3) la variazione di entropia; 4) il rendimento del ciclo.
(V_A=2m^3, P_A=10kpa, P_B=40kpa)

Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 2/03/2010

1 Quesito

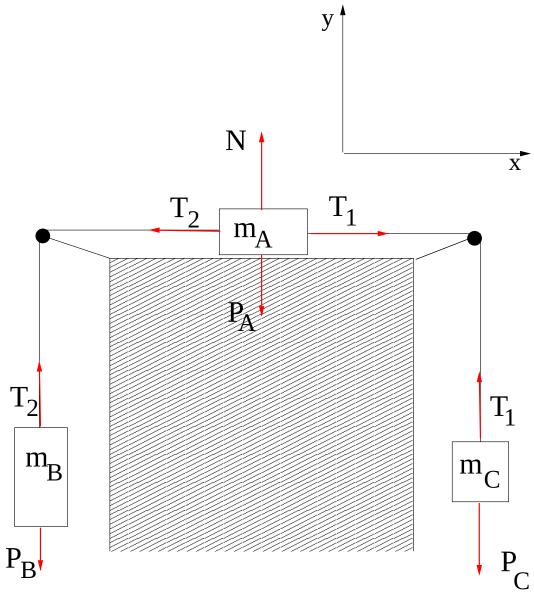


Figura 1: Quesito 2

L'accelerazione della massa m_A (che coincide in modulo con l'accelerazione di m_B e di m_C) si ricava dal calcolo della risultante delle forze agenti su ciascuna massa. In un sistema di riferimento con l'asse delle x orizzontale orientato verso destra ed asse y verticale diretto verso l'alto (vedi figura 1), si ha:

$$\begin{array}{lll} m_A: & forze\ lungo\ x & T_1 - T_2 = m_A a \\ m_A: & forze\ lungo\ y & N = m_A g \\ m_B: & forze\ lungo\ y & T_2 - m_B g = m_B a \\ m_C: & forze\ lungo\ y & T_1 - m_C g = -m_C a \end{array} \tag{1}$$

in cui si è utilizzato il fatto che ad uno spostamento lungo i rispettivi assi x ed y positivi delle massse m_A ed m_B corrisponde uno spostamento lungo la direzione negativa dell'asse y per la massa m_C. Sommando la seconda equazione alla differenza della prima e della terza si ottiene

$$a = \frac{m_C - m_B}{m_A + m_B + m_C} g \tag{2}$$

Numericamente, $a = 0.42$ m/s^2.
In presenza di una forza di attrito statico f_a, ed in condizioni di equilibrio, le equazioni 1 si modificano in:

$$\begin{array}{lll} m_A: & forze\ lungo\ x & T_1 - T_2 + f_a = 0 \\ m_A: & forze\ lungo\ y & N = m_A g \\ m_B: & forze\ lungo\ y & T_2 - m_B g = 0 \\ m_C: & forze\ lungo\ y & T_1 - m_C g = 0 \end{array} \tag{3}$$

da cui si ottiene immediatamente

$$f_a = m_B - m_C$$

Inoltre vale che

$$|f_a| \le \mu |N|$$

da cui si ricava

$$\mu \ge \frac{|m_B - m_C|}{m_A}$$

Numericamente, $\mu \ge 1.5$.

2 Quesito

Durante l'urto, non si conserva l'energia cinetica del sistema sbarra-massa. L'urto è infatti totalmente anelsatico (la massa rimane conficcata nella sbarra). A causa della presenza della reazione vincolare in O, di natura impulsiva, non si conserva neppure la quantità di moto. Viceversa, nell'ipotesi di urto istantaneo, il contributo del momento frenante (di modulo costante, come conseguenza dela costanza di τ) diventa trascurabile durante l'urto e la reazione vincolare ha momento nullo rispetto ad O. Dunque il momento angolare del sistema sbarra-massa calcolato rispetto ad O si conserva durante l'urto.

$$m v_0 \frac{l}{4} = I_{tot} \omega_0 \tag{4}$$

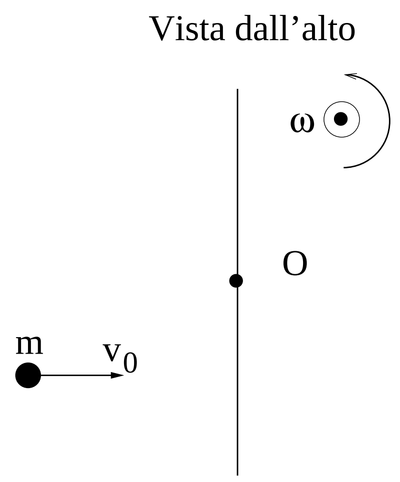


Figura 2: Quesito 2

ω_0 ed I_{tot} sono rispettivamente la velocità angolare ed il momento di inerzia del sistema rispetto ad un asse verticale passante per O, subito dopo l'urto. I_{tot} si può calcolare sfruttando l'additività del momento di inerzia

$$I_{tot} = \frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 \tag{5}$$

Dall'equazione 2 si ottiene:

$$\omega_0 = \frac{mv_0 l}{4I_{tot}} \tag{6}$$

Numericamente, ω_0 =1.46 rad/s.
Dopo l'urto, il moto del sistema sbarra-massa è descritto dalla II equzione cardinale

$$I_{tot}\alpha = -\tau \tag{7}$$

in cui α è il modulo (costante) dell'accelerazione angolare e si è assunto come verso positivo delle rotazioni quello indicato in figura (verso antiorario). Da considerazioni di cinematica segue che:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \alpha t + \omega_0 \\ \theta(t) &= \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t \end{aligned} \tag{8}$$

in cui $\omega = d\theta/dt$ e $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$. L'istante in cui il sistema si arresta corrisponde al tempo t_{stop} in cui si annulla la velocità angolare, ovvero

$$t_{stop} = -\frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 I_{tot}}{\tau}$$

Il numero di giri completi effettuati si ottiene:

$$N_{giri} = \frac{\theta(t_{stop})}{2\pi} \tag{9}$$

Numericamente, N_{giri}=69

3 Quesito

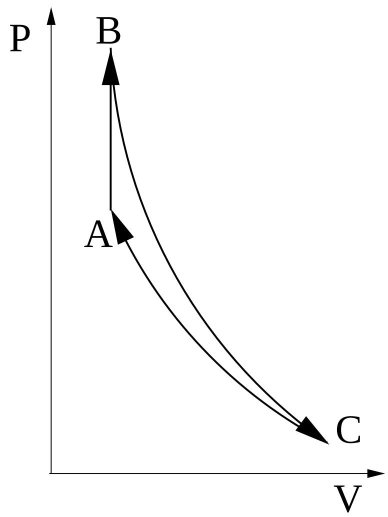


Figura 3: Quesito 3

Il ciclo reversibile descritto nel testo è rappresentato in figura. È costituitio da una trasformzione isocora AB, da una trasformazione abiabatica BC e da una trasformazione isoterma CA. Il volume nello stato C si calcola sfruttando il fatto che la trasformazione BC è un'adiabatica reversibile lungo cui, quindi, vale $TV^{\gamma-1}$=costante (γ=7/5 nel caso di un gas biatomico):

$$\begin{aligned} T_C V_C^{(\gamma-1)} &= T_B V_B^{(\gamma-1)} \\ V_C &= \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_B \end{aligned} \tag{10}$$

Numericamente si ottiene V_C=64 m^3. P$_C$ si ricava dalla relazione dei gas perfetti. La tabella seguente riassume il valore delle variabili termodinamiche negli stati A, B e C.

	Volume	Pressione	Temperatura
A	2m^3	10kPa	T$_A$=$\frac{P_A V_A}{nR}$= 1203K
B	2m^3	40kPa	T$_B$=$\frac{P_B V_A}{nR}$=4812K
C	64m^3	312Pa	T$_C$=T$_A$=1203K

- Trasformazione AB, isocora ($L_{AB} = 0$):

$$
\begin{aligned}
Q_{AB} &= \int_A^B nC_v dT = nC_v(T_B - T_A) \\
S_{AB} &= \int_A^B nC_v \frac{dT}{T} = nC_v ln\frac{T_B}{T_A}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

  Numericamente, Q_{AB}=150KJ, S_{AB}=57.6 J/K.

- Trasformazione CA, isoterma ($Q_{CA} = L_{CA}$):

$$
\begin{aligned}
L_{CA} &= \int_C^A pdV = \int_C^A nRT\frac{dV}{V} = nRT_A ln\frac{V_A}{V_C} \\
S_{CA} &= \int_C^A \frac{dQ}{T} = \int_C^A \frac{pdV}{T} = \int_C^A nRT\frac{dV}{V} = nRln\frac{V_A}{V_C}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

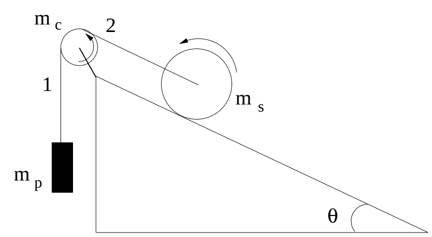
Numericamente, $Q_{CA} = L_{CA}$=-69.3 kJ, S_{CA}=-57.6 J/K.
Nella trasformazione BC (adiabatica reversibile) $Q_{BC} = 0, S_{BC} = 0$. Dal primo principio della termodinamica ($Q - L = 0$ in un ciclo termodinamico), segue che $L_{BC} = 150$kJ. Si noti inoltre che la variazione complessiva di entropia sul ciclo considerato è ovviamente zero. Il rendimento del ciclo termodinamico è

$$
\eta = \frac{\text{(Lavoro scambiato)}}{\text{(Calore assorbito)}} = \frac{L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}}{Q_{AB}}
\tag{13}
$$

Numericamente si ottiene $\eta \sim 54\%$.

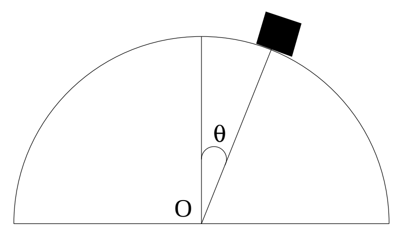
Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 8/09/09

Esercizio 1



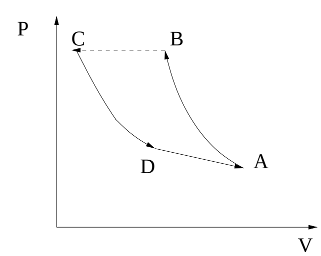
Un sistema meccanico è costituito da una sfera omogenea di raggio R=20 cm e massa m_s=1 kg il cui centro è collegato con una fune ad una carrucola (assimilabile ad un disco omogeneo) di massa m_c=200 g e raggio r= R/2 e ad un peso di massa $m_p=2m_s$. La sfera, inizialmente in quiete, è vincolata a rotolare senza strisciare lungo un piano inclinato (θ =30°). Assumendo che i centri di massa della sfera e della carrucola restino alla stessa distanza dal piano inclinato durante il moto, si calcoli: 1) l'accelerazione lineare della sfera, l'accelerazione angolare della carrucola e la tensione dei due tratti di fune 2) il valore minimo del coefficiente di attrito tra sfera e piano affinchè durante il moto sia mantenuto il vincolo di rotolamento puro.

Esercizio 2



Un blocccchetto di massa M=3 kg, di dimensioni trascurabili, è posto sulla sommità di una superficie emisferica liscia di raggio R=10 m. Ad esso è impressa una velocità iniziale di modulo v_0=5 m/s. Si calcoli 1) il valore dell'angolo per cui il blocco si stacca dalla superficie, 2) il valore minimo di v_0 affinchè il blocco si stacchi dalla superficie immediatamente dopo l'istante iniziale.

Esercizio 3



Una mole di gas ideale monoatomico esegue un ciclo termodinamico costituito da (vedi figura): una compressione adiabatica reversibile AB (V_A = 0.019 m^3, T_A = 308 K, V_B = 0.009 m^3); un'isobara irreversibile BC realizzata mantenendo il gas a pressione costante in contatto termico con una sorgente a temperatura T_C = 210 K; un'isoterma reversibile CD (V_D = 0.005 m^3) in cui è mantenuto il contatto con la stessa sorgente; un'espansione reversibile DA rappresentata da un segmento rettilineo nel piano PV con equazione $P = P_D + (P_A-P_D)(V-V_D)/(V_A-V_D)$. Calcolare: 1) la temperatura T_B 2) il lavoro ed il calore scambiati in ciascuna trasformazione.

Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 8/09/2009

1 Quesito

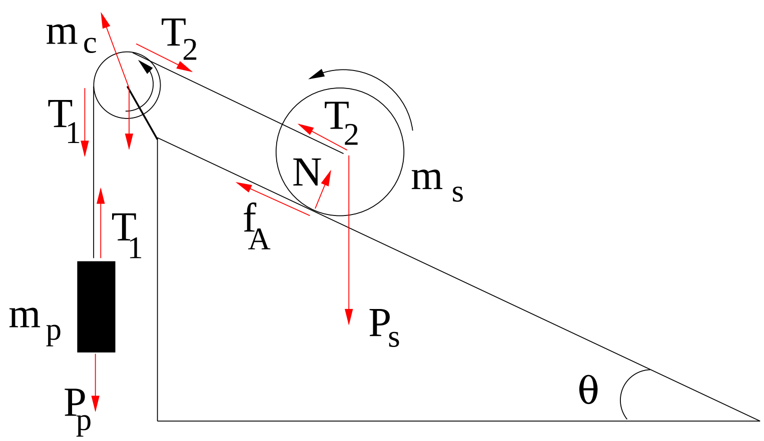


Figura 1: Quesito 1

La soluzione del primo quesito si ricava utilizzando le equazioni cardinali per il sistema meccanico costituito dalla sfera, dalla carrucola e dal peso. In un sistema di riferimento con asse x lungo il piano inclinato e verso positivo per le rotazioni scelto in senso antiorario, si ha che:

$$\begin{aligned}
Sfera: \ forze\ lungo\ x \qquad & -f_A + m_s g sen\theta - T_2 = m_s a_s \\
Sfera: \ forze\ lungo\ y \qquad & N = m_s g cos\theta \\
Sfera: \ momento\ lungo\ z \qquad & -f_A R = I_s \alpha_s \\
Cond.\ rot.\ puro\ sfera\ e\ carrucola \qquad & a_s = -R\alpha_s = -r\alpha_c \\
Carrucola: \ momento\ lungo\ z \qquad & (T_1 - T_2) r = I_c \alpha_c \\
Peso: \ \ forze\ risultanti \qquad & T_1 - m_p g = m_p a_s
\end{aligned} \tag{1}$$

f_A rappresenta la forza di attrito statico esercitato dalla superficie del piano sulla sfera, N è la reazione normale al piano, T_1 e T_2 sono le tensioni della fune applicate nel tratto 1 e 2, a_s rappresenta l'accelerazione del centro di massa della sfera lungo l'asse x, α_s e α_c sono i moduli delle accelerazioni angolari

per la sfera e per la carrucola ed I_s e I_c i momenti di inerzia corrispondenti calcolati rispetto ad un asse passante per i rispettivi centri e perpendicolare al piano che li contiene.
Esprimendo f_A in funzione di a_s (tramite la terza e la quarta equazione) e ricavando T_2 in funzione di a_s (tramite la quinta equazione) e di T_1, a sua volta funzione di a_s (tramite la sesta equazione), si ottiene:

$$\begin{aligned} f_A &= \frac{I_s a_s}{R^2} \\ T_1 &= m_p(g + a_s) \\ T_2 &= m_p(g + a_s) + \frac{I_c a_s}{r^2} \\ m_s a_s &= -\frac{I_s a_s}{R^2} + m_s g sen\theta - m_p(g + a_s) - \frac{I_c a_s}{r^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Dall'ultima equazione si ricava:

$$a_s = g\frac{m_s sen\theta - m_p}{m_s + m_p + \frac{I_c}{r^2} + \frac{I_s}{R^2}} \tag{3}$$

Utilizzando la definizione di momento di inerzia:

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{1}{2} m_c r^2 \\ I_s &= \frac{2}{5} m_s R^2 \end{aligned} \tag{4}$$

si ottiene numericamente, a_s=-4.2 m/s^2, T_1= 11.2 N, T_2= 10.8 N.
La risposta alla seconda domanda deriva dalla condizione di attrito statico $|f_A| \leq \mu|N|$, dove μ identifica il coefficente di attrito. Da quest'ultima espressione, utilizzando l'equazione 2,

$$\mu \geq \mu_{min} = \frac{2}{5}\frac{a_s}{g cos\theta} \tag{5}$$

Numericamente, μ_{min}=0.19.

2 Quesito

La soluzione deriva dal principio di conservazione dell'energia meccanica. Infatti, le forze agenti sul blocchetto sono conservative (la forza peso) oppure

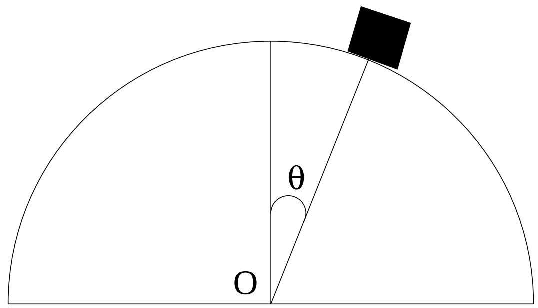


Figura 2: Quesito 2

non compiono lavoro durante il moto (la reazione vincolare è istantaneamente normale alla traiettoria sulla superficie emisferica).

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgRcos\theta \tag{6}$$

in cui il termine a sinistra è l'energia meccanica del sistema (cinetica più potenziale) nella configurazione in cui il blocchetto è verticale ($\theta = 0°$). Il termine a destra si riferisce alla generica configurazione di $\theta \leq \theta_{lim}$ in cui θ_{lim} identifica l'angolo per cui il blocchetto si stacca dalla superficie emisferica. D'altronde, considerando la risultante delle forze applicate al blocchetto lungo la direzione radiale si può scrivere:

$$m\frac{v^2}{R} = mgcos\theta - N \tag{7}$$

in cui N è la reazione normale. In corrispondenza di $\theta = \theta_{lim}$ la reazione $N = 0$, ed in questo caso, dall'equazione 7 si ottiene:

$$cos\theta_{lim} = \frac{v_{\theta_{lim}}^2}{gR} \tag{8}$$

Sostituendo in equazione 6, si deriva che

$$v_{\theta_{lim}}^2 = \frac{v_0^2 + 2gR}{3} \tag{9}$$

Dall'equazione 8 si ricava infine:

$$cos\theta_{lim} = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} \tag{10}$$

Numericamente, θ_{lim}=41.3°.
La risposta al secondo punto si ricava banalmente dall'equazione 7 imponendo che N=0 per $\theta = 0°$. Ciò implica che $v_{\theta_0}^2 = Rg$. Numericamente, v_{θ_0}=10 m/s.

3 Quesito

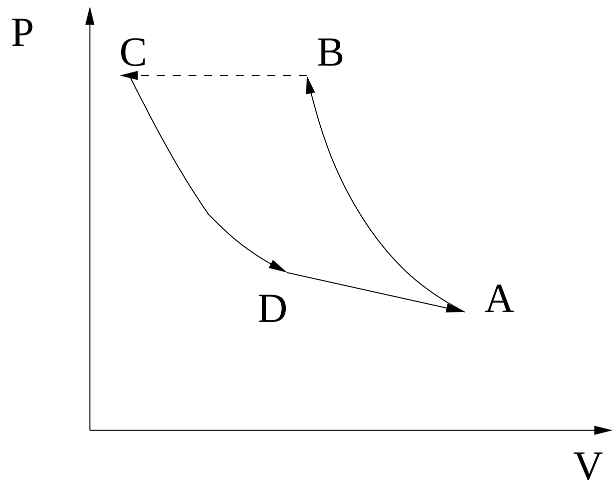


Figura 3: Quesito 3

Si procede innanzitutto con il calcolo delle variabili termodinamiche relative ai vari stati, utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti.

$$
\begin{aligned}
&P_A = nR\frac{T_A}{V_A} && \\
&P_B = P_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} && AB \;\; adiabatica \\
&T_B = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} && AB \;\; adiabatica \\
&P_C = P_B && BC \;\; isobara \\
&V_C = nR\frac{T_C}{P_C} && \\
&T_C = T_D && CD \;\; isoterma \\
&P_D = nR\frac{T_D}{V_D} &&
\end{aligned} \tag{11}
$$

Numericamente T_B=506 K.
Il lavoro ed il calore complessivamente scambiati nelle trasformazioni proposte nel quesito possono essere calcolati come segue.
<u>Trasformazione AB</u>, adiabatica reversibile.
Q_{AB}=0, ΔE_{AB}=$nC_V(T_B - T_A)$=$-L_{AB}$, (ΔE_{AB} è la variazione di energia interna del sistema nella trasformazione AB). Numericamente, L_{AB}=-2.5

KJ.
Trasformazione BC, isobara irreversibile.
$\Delta E_{BC} = Q_{BC}$ - L_{BC} resta valido perchè l'energia interna è una funzione di stato. Inoltre, si ha che L_{BC}=$P_B(V_C - V_B)$ perchè la pressione rimane costante durante la trasformazione. Numericamente, L_{BC}=-2.5 KJ. Q_{BC}=ΔE_{BC} + L_{BC} = $nC_V(T_C - T_B)$ + L_{BC}. Numericamente, Q_{BC}=-6.2 KJ.
Trasformazione CD, isoterma reversibile.
ΔE_{CD}=0, Q_{CD}=L_{CD}. Numericamente, Q_{CD}=0.5 KJ
Trasformazione DA, reversivile, pressione correlata linearmente al volume.
$\Delta E_{DA} = Q_{DA}$ - L_{DA}=$nC_V(T_A - T_D)$. Il calcolo del lavoro L_{DA} si può effettuare integrando la funzione $P(V)$ lungo la trasformazione DA:

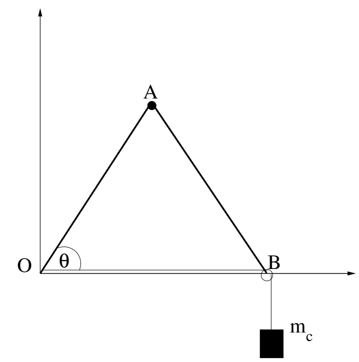
$$L_{DA} = \int P(V)dV = \int_{V_D}^{V_A} [P_D + (P_A - P_D)(V - V_D)/(V_A - V_D]dV \quad (12)$$

oppure più semplicemente osservando che lo stesso integrale è equivalente all'area del trapezio rettangolo sotteso dal segmento DA. Ciò equivale a dire che L_{DA}=$(V_A - V_D)(P_A + P_D)/2$. Numericamente, L_{DA}=3.4 KJ. Q_{DA}=ΔE_{DA} + L_{DA}. Numericamente, Q_{DA}=4.6 KJ.

Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione

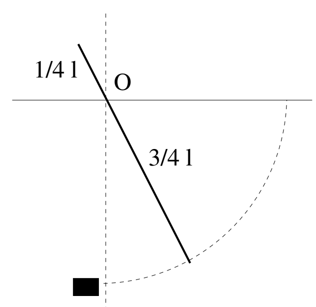
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 12/01/10

Esercizio 1



Un sistema meccanico è costituito da due sbarre omogenee identiche di lunghezza l=40 cm e massa m=4 kg, imperniate in A e tali che l'estremo B sia vincolato a scorrere lungo una guida orizzontale. Il sistema è mantenuto in equilibrio da un contrappeso di massa m_c sospeso ad una fune ideale di lunghezza complessiva 2l, attaccata nel punto fisso O. Si calcoli il valore di m_c per cui il sistema è in equilibrio nella posizione in cui $\theta = 50°$. Supponendo che in corrispondenza dell'estremo B agisca una forza di attrito con coefficiente μ=0.1, si determini l'intervallo di valori di θ per cui il sistema è in equilibrio, assumendo per m_c il valore determinato precedentemente.

Esercizio 2



Una sbarra omogenea di lunghezza l=1m e massa M=5 kg è appesa ad un perno situato ad 1/4 della sua lunghezza. La sbarra che può ruotare liberamente nel piano verticale come mostrato in figura, è inizialmente in quiete in posizione orizzontale. Successivamente viene lasciata cadere e quando giunge nella posizione verticale, urta elasticamente in corrispondenza del suo estremo un blocchetto di massa m=200 g. Si calcoli il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione, la velocità angolare della sbarra subito prima dell'urto e la velocità del blocchetto subito dopo l'urto.

Esercizio 3

Un gas monotamico ideale è inserito all'interno di un cilindro il cui volume è limitato da un pistone mobile di massa trascurabile. L'estremo inferiore del pistone è collegato alla base del cilindro attraverso una molla di costante elastica k=12000 N/m e lunghezza di riposo nulla. Il gas e il pistone si trovano inizialmente all'equilibrio alla temperatura T_0=300K. Trascurando l'effetto della forza di gravità, si calcoli il numero di moli di gas sapendo che la quota del pistone all'equilibrio è 1 m. Successivamente, si esegue una trasformazione reversibile fornendo calore al sistema in modo che la temperatura finale del gas raggiunga il valore T_1 = 680K. Si calcoli il lavoro e la quantità di calore scambiati dal gas durante la trasformazione.

Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 12/01/2010

1 Quesito

La soluzione alla prima domanda del quesito si ricava imponendo che l'energia potenziale complessiva associata al sistema meccanico abbia derivata nulla (condizione di equilibrio) rispetto alla variazione dell'angolo θ. L'energia potenziale complessiva è:

$$U(\theta) = \frac{1}{2} l sen\theta \ mg + \frac{1}{2} l sen\theta \ mg - m_c(2l - 2l cos\theta) \tag{1}$$

I primi due termini rappresentano i contributi gravitazionali associati alle sbarre ($l/2 sen\theta$ è la quota del centro di massa di ciascuna sbarra). Il terzo termine è il contributo gravitazionale associato alla massa m_c, la cui quota è data dalla lunghezza della fune meno il tratto BO. Derivando rispetto a θ:

$$\frac{dU}{d\theta} = mgl cos\theta - 2m_c gl sen\theta \tag{2}$$

e imponendo che $dU/d\theta$=0 si ottiene:

$$m_c = \frac{m}{2 tan\theta_0} \tag{3}$$

Numericamente, per θ_0=50°, si ottiene m_c=1.68 Kg.
Lo studio del segno della derivata seconda ($d^2U/d\theta^2(\theta_0) < 0$) suggerisce inoltre che si tratta di una posizione di equilibrio instabile.

La risposta alla seconda domanda segue dallo studio della condizione di equilibrio del sistema, ottenuta annullando la risultante delle forze e dei momenti di forze esterne applicate al sistema. All'estremo B sono applicate (vedi figura) la reazione normale N dovuta alla guida orizzontale, la tensione della fune T sia lungo l'asse x che lungo l'asse y, e la forza di attrito F_s. All'estremo O sono applicate la reazione vincolare R e la tensione della fune T. Su ciascuna sbarra sono inoltre applicate le rispettive forze peso. Sulla massa m_c è applicata la tensone della fune T e la forza peso, entrambe verticali e di verso opposto (all'equilibrio ciò implica T=m_cg). Nell'estremo A sono applicate le mutue forze di contatto tra le sbarre Z, uguali e contrarie nel senso del terzo principio della dinamica. Imponendo che la risultante dei

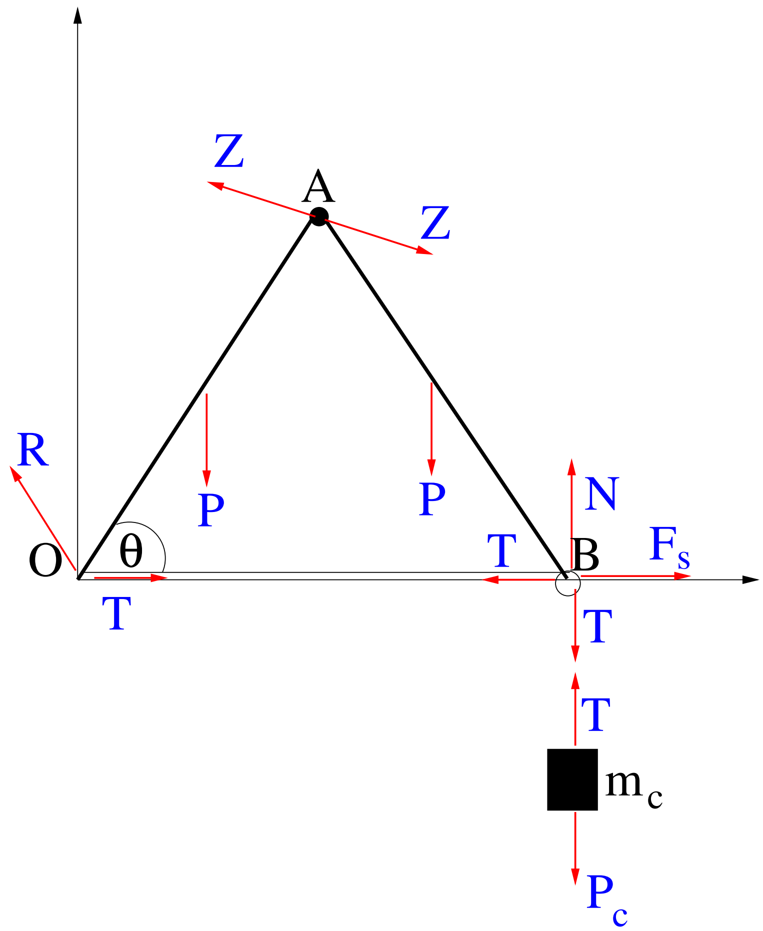


Figura 1: Quesito 1

momenti di forza applicati sulla sbarra AB, calcolati rispetti al polo A, sia nulla, si ottiene:

$$mg\frac{1}{2}lcos\theta - Nlcos\theta - F_slsen\theta + Tlcos\theta + Tlsen\theta = 0 \tag{4}$$

Imponendo inoltre che la risultante dei momenti di forza applicati al sistema delle due sbarre calcolati rispetti al polo O, sia nulla, si ottiene:

$$-T2lcos\theta + N2lcos\theta - mg\frac{1}{2}lcos\theta - mg\frac{3}{2}lcos\theta = 0 \tag{5}$$

Da quest'ultima equazione si ricava che

$$N = g(m + m_c)$$

Sostituendo in equazione 4, si ottiene

$$F_s = m_c g - \frac{mg}{2tan\theta}$$

L'intervallo di valori di θ per cui si ha equilibrio si ottiene sfruttando la condizione

$$|F_s| \leq \mu |N|$$

Utilizzando le espressione di F_s e N appena calcolate si ottiene:

$$-\mu(m + m_c) \leq m_c - \frac{m}{2tan\theta} \leq \mu(m + m_c) \tag{6}$$

Risolvendo rispetto a θ si ha:

$$\frac{m}{2\left[(1+\mu)m_c + \mu m\right]} \leq tan\ \theta \leq \frac{m}{2\left[(1-\mu)m_c - \mu m\right]} \tag{7}$$

Numericamente $42° < \theta < 61°$.

2 Quesito

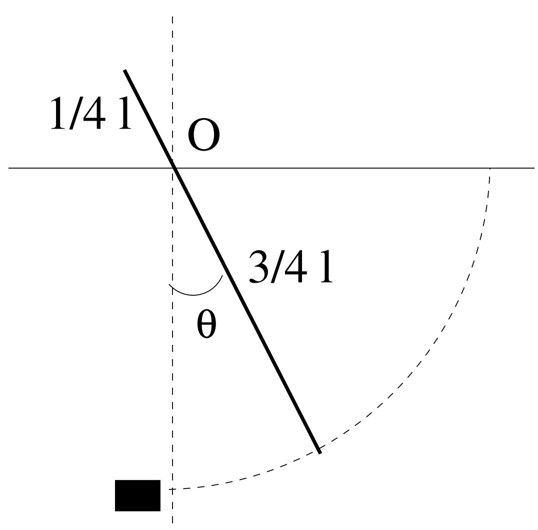


Figura 2: Quesito 2

Il calcolo del momento di inerzia della sbarra rispetto ad un asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per il punto O si ottiene applicando il teorema di Huygens-Steiner.

$$I_O = I_{CM} + M(\frac{1}{4}l)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{16}Ml^2 = \frac{7}{48}Ml^2 \tag{8}$$

Il primo termine rappresenta il momento di inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per il centro di massa della sbarra ed il secondo termine tiene conto, secondo il citato teorema, della distanza tra quest'asse e l'asse di rotazione passante per O. Numericamente $I_O = 0.73$ kgm^2

Per lo studio del moto della sbarra prima dell'urto ci si avvale del principio di conservazione dell'energia meccanica. Sul sistema agisce la forza peso (conservativa) e la reazione vincolare in O, che non fa lavoro. Si avrà quindi in generale:

$$-\frac{1}{4}lcos\theta Mg + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = 0 \tag{9}$$

in cui il primo termine rappresenta l'energia potenziale della sbarra per un generico valore dell'angolo θ ed il secondo termine è l'energia cinetica in corrispondenza del medesimo angolo. Si è assunto come zero dell'energia potenziale la quota per cui la sbarra è in posizione orizzontale. In particolare, sulla verticale:

$$\frac{1}{2}I_O\omega_0^2 = \frac{1}{4}Mgl \tag{10}$$

e quindi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{Mgl}{I_O}}$$

Numericamente, $\omega_0 = 5.8$ rad/s.

Durante l'urto, si conserva l'energia cinetica del sistema sbarra+massa (si tratta di un urto elastico). L'azione di forze vincolari di natura impulsiva (quelle applicate in O) implica che la quantità di moto non si conservi. Si conserva invece il momento angolare rispetto ad O, poichè il momento di forze ad esse dovuto è nullo.

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}I_O\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_O\omega'^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ I_O\omega_0 = I_O\omega' + \frac{3}{4}lmv\end{gathered} \tag{11}$$

La prima (seconda) equazione rappresenta la conservazione dell'energia cinetica (del momento angolare) tra l'istante immediatamente prima dell'urto e quello immediatamente successivo ($\omega^{'}$ è la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto, v è la velocità acquisita dalla massa m in conseguenza dell'urto). Riorganizzando i termini e dividendo ad esempio la prima e la seconda equazione del sistema 11 si ottiene:

$$\begin{aligned} \omega_0 + \omega^{'} &= \frac{4}{3}\frac{v}{l} \\ \omega_0 - \omega^{'} &= \frac{3}{4}\frac{mvl}{I_O} \end{aligned} \tag{12}$$

Risolvendo rispetto a v si ottiene:

$$v = \frac{\omega_0}{\frac{2}{3l} - \frac{3ml}{8I_O}} \tag{13}$$

Numericamente, v= 7.5 m/s.

3 Quesito

Nella condizione di equilibrio la forza esercitata dalla molla sul pistone dovrà uguagliare la forza generata sul pistone a causa della pressione del gas.

$$kx = PA \tag{14}$$

in cui si è indicato con x l'allungamento della molla (che corrisponde all'altezza del cilindro entro cui il pistone confina il gas), con P la pressione del gas e con A la sezione del pistone. Inoltre, per la relazione dei gas perfetti, all'equilibrio vale PV=nRT, che in questo caso (V=Sx) diviene

$$PAx = nRT \tag{15}$$

Combinando le equazioni 14 e 15 si ottiene

$$kx^2 = nRT \rightarrow n = \frac{kx^2}{RT} \tag{16}$$

Numericamente, n= 4.81 mol.

Il passaggio dallo stato iniziale a quello finale avviene attraverso una trasformazione reversibile di stati quasi statici per ciascuno dei quali vale l'equilibrio meccanico espresso dall'equazione 14. Quindi, il lavoro complessivamente svolto nella trasformazione dalla stato iniziale a quello finale è:

$$L_{if} = \int_i^f PdV = \int_{x_{iniziale}}^{x_{finale}} \frac{kx}{A} Adx = \frac{1}{2}k(x^2_{finale} - x^2_{iniziale}) \tag{17}$$

Utilizzando l'equazione 16, si ottiene

$$L_{if} = \frac{1}{2}k(x^2_{finale} - x^2_{iniziale}) = \frac{1}{2}nR(T_{finale} - T_{iniziale}) \tag{18}$$

Numericamente, $L_{if} = 7590$ J.

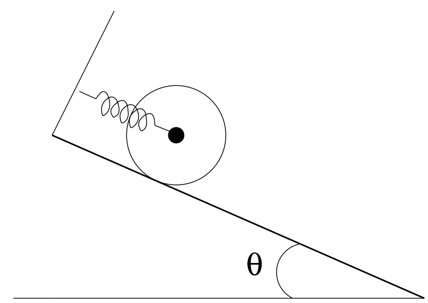
La variazione di energia interna del sistema è $\Delta U = nc_V(T_{finale} - T_{iniziale})$, da cui $\Delta Q = \Delta U + \Delta L$. Combinando con l'equazione 18 si ottiene:

$$\Delta Q = nc_V(T_{finale} - T_{iniziale}) + \frac{1}{2}nR(T_{finale} - T_{iniziale}) = 3nR(T_{finale} - T_{iniziale})$$

Numericamente, $\Delta Q = 45570$ J

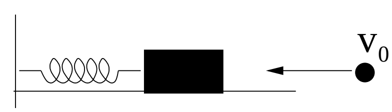
Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 21/07/09

Esercizio 1



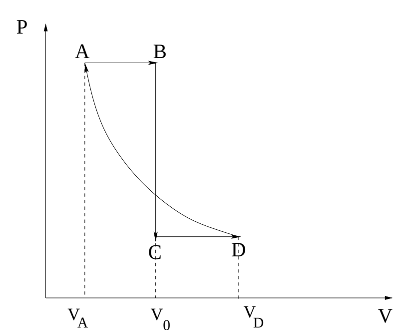
Un sistema meccanico costituito da un disco sottile non omogeneo di raggio R e massa m=3 kg, è vincolato a rotolare senza strisciare su un piano inclinato che forma un angolo θ=30° con l'orizzontale. La densità del disco è inversamente proporzionale al suo raggio. Una molla di costante elastica k=200 N/m e lunghezza di riposo trascurabile è applicata nel centro del disco. Si determini il valore dell'allungamento della molla all'equilibrio. Successivamente, la molla viene rimossa e il disco rotola lungo il piano inclinato. Si calcoli il minimo valore del coefficiente di attrito per cui il moto del disco si mantiene di rotolamento puro.

Esercizio 2



Una massa puntiforme M = 1 kg oscilla su un piano orizzontale senza attrito sotto l'azione della forza elastica esercitata da una molla di costante k=300 N/m. Una massa m = 0.1 kg che si muove con velocità orizzontale v_0 = 30 m/s urta la massa M nel punto di massima elongazione della molla, corrispondente all'ampiezza massima di oscillazione A_0=0.5 m. Subito dopo l'urto, la massa m resta conficcata in M. Si calcoli 1) la velocità del sistema M+m subito dopo l'urto 2) l'ampiezza massima delle oscillazioni dopo l'urto 3) la quantità di energia dissipata nell'urto.

Esercizio 3



Un gas ideale biatomico compie il ciclo reversibile descritto in figura (DA è una isoterma). I valori dei volumi nei punti A e D sono rispettivamente $V_A = 10^{-3}$ m^3 e $V_D = 5\cdot 10^{-3}$ m^3. Calcolare 1) per quale valore di V_0 il lavoro complessivo svolto in un ciclo è nullo 2) il numero di moli del gas, richiedendo che nel punto C si abbia pressione e temperatura $P_C = 10^5$ Pa e T_C = 300 K 3) la variazione di entropia in ciascuna trasformazione.

Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 21/07/2009

1 Quesito

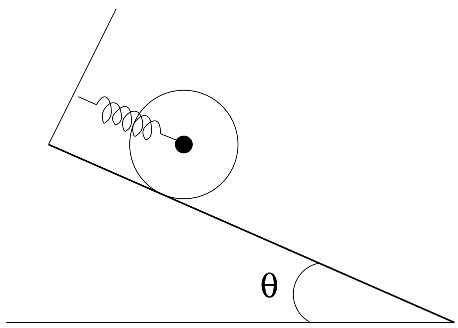


Figura 1: Quesito 1

La soluzione alla prima domanda del quesito si ricava imponendo che l'energia potenziale complessiva associata al sistema meccanico abbia derivata nulla (condizione di equilibrio) rispetto alla variazione dell'allungamento X della molla. L'energia potenziale complessiva è:

$$U(X) = mg(h - Xsen\theta) + \frac{1}{2}kX^2 \tag{1}$$

Il primo termine rappresenta il contributo gravitazionale associato al disco (h è la quota del centro di massa del disco per X=0). Il secondo termine è relativo alla forza elastica esercitata dalla molla. Derivando rispetto a X:

$$\frac{dU}{dX} = -mgsen\theta + kX \tag{2}$$

e imponendo che dU/dX=0 si ottiene:

$$X_{eq} = \frac{mgsen\theta}{k} \tag{3}$$

Numericamente, X_{eq}=7.3 cm.
Lo stesso risultato si ricava equivalentemente imponendo che la risultante

delle forze esterne (e dei momenti) applicate (applicati) al disco siano nulli (condizione di staticità). In un sistema di riferimento con asse x lungo il piano inclinato e verso positivo per le rotazioni scelto in senso antiorario, si ha che:

$$\begin{aligned} Forze\ lungo\ x \quad & -F_s + mgsen\theta - kX = 0 \\ Forze\ lungo\ y \quad & N - mgcos\theta = 0 \\ Momento\ lungo\ z \quad & -F_sR = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

F_s rappresenta la forza di attrito statico esercitato dalla superficie del piano sul disco ed N è la reazione normale al piano. Dall'equazione 4 si ricava che F_s=0 e che $X = mgsen\theta/k$.
La risposta alla seconda domanda segue dalla risoluzione delle equazioni cardinali per il disco che rotola senza strisciare.

$$\begin{aligned} Forze\ lungo\ x \quad & -F_s + mgsen\theta = ma_x \\ Forze\ lungo\ y \quad & N = mgcos\theta \\ Momento\ lungo\ z \quad & -F_sR = I\alpha \\ Cond.\ rot.\ puro \quad & a_x = -R\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

a_x rappresenta l'accelerazione del centro di massa lungo l'asse x, α è l'accelerazione angolare ed I il momento di inerzia del disco calcolato rispetto ad un asse passante per il centro del disco e perpendicolare al piano che lo contiene. Dal sistema di equazioni 5 si ottiene il valore della forza di attrito statico F_s

$$F_s = \frac{mgsen\theta}{1 + \frac{mR^2}{I}} \tag{6}$$

D'altronde $|Fs| \leq \mu|N|$, dove μ identifica il coefficente di attrito. Da quest'ultima condizione si ricava

$$\mu \geq \mu_{min} = \frac{tan\theta}{1 + \frac{mR^2}{I}} \tag{7}$$

I deriva dalla definizione di momento di inerzia. Si sfrutta inoltre l'informazione relativa all'andamento della densità del disco $\sigma(r) = c/r$. La massa del disco si può esprimere come:

$$m = \int dm = \int \sigma(r)dS = \int_0^R \frac{c}{r} 2\pi r dr = 2\pi cR \tag{8}$$

Il momento di inerzia è:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{c}{r} 2\pi r dr = 2\pi c \int_0^R r^2 dr = \frac{mR^2}{3} \tag{9}$$

Sostituendo l'espressione di I nell'equazione 7 si ottiene

$$\mu_{min} = \frac{tan\theta}{4} \tag{10}$$

Numericamente, μ_{min}=0.14.

2 Quesito

Figura 2: Quesito 2

Durante l'urto la quantità di moto del sistema m+M si conserva (non agiscono forze esterne di natura impulsiva). L'urto avviene nella configurazione in cui la molla ha raggiunto la massima elongazione (in corrispondenza cioè del punto di inversione della velocià per la massa M) ed è completamente anelastico (m resta conficcata in M). Si ha quindi che:

$$mv_0 = (M+m)v' \rightarrow v' = \frac{mv_0}{m+M} \tag{11}$$

in cui v' rappresenta la velocità del sistema m+M subito dopo l'urto. Numericamente, v' =2.7 m/s.
Il valore della massima ampiezza di oscillazione A' si ottiene applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica per il sistema m+M:

$$\frac{1}{2}kA_0^2 + \frac{1}{2}(m+M)v'^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \tag{12}$$

il termine a sinistra descrive i contributi di energia potenziale e cinetica del sistema subito dopo l'urto ed il termine a destra rappresenta la massima energia potenziale accumulabile dal sistema. Risolvendo:

$$A' = \sqrt{A_0^2 + \frac{m^2v_0^2}{k(m+M)}} \tag{13}$$

Numericamente, A'=0.53 m.
Infine l'energia dissipata durante l'urto si ricava calcolando la variazione di energia cinetica tra l'istante subito prima e quello subito dopo l'urto.

$$E_{diss} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)v'^2 \tag{14}$$

Numericamente, E_{diss}= 41 J.

3 Quesito

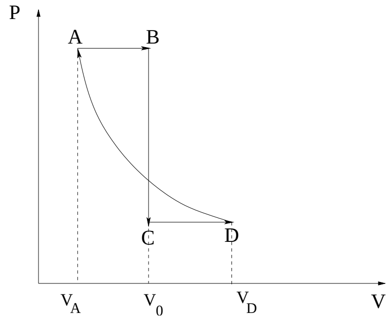


Figura 3: Quesito 3

Il lavoro complessivamente svolto nel ciclo è dato dalla somma dei contributi relativi a ciascuna trasformazione:

$$\begin{aligned} &L_{AB} = P_{A,B}(V_B - V_A) \\ &L_{BC} = 0 \\ &L_{CD} = P_{C,D}(V_D - V_C) \\ &L_{DA} = \int PdV = nRT_{A,D} \int_{V_D}^{V_A} \frac{dV}{V} = nRT_{A,D} ln \frac{V_A}{V_D} \end{aligned} \tag{15}$$

Si calcola quindi il valore $V_0 = V_B = V_C$ per cui il lavoro complessivo nel ciclo $L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$ si annulla:

$$P_{A,B}(V_0 - V_A) + P_{C,D}(V_D - V_0) + nRT_{A,D} ln \frac{V_A}{V_D} = 0 \tag{16}$$

Si osserva inoltre che poichè la trasformazione AD è isoterma e la trasformazione CD è isobara, si ha:

$$\frac{P_A V_A}{nR} = T_A = T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = \frac{P_C V_D}{nR} \tag{17}$$

Sostituendo nell'equazione 16 a P_A e P_C le corrispettive espressioni in funzione di T_A ricavate dall'equazione 17, si ottiene:

$$\frac{nRT_A}{V_A}(V_0 - V_A) + \frac{nRT_A}{V_D}(V_D - V_C) + nRT_A ln \frac{V_A}{V_D} = 0 \tag{18}$$

da cui discende svolgendo i calcoli:

$$V_0 = \frac{V_A V_D}{V_D - V_A} ln \frac{V_A}{V_D} \tag{19}$$

Numericamente, V_0=2 10^{-3} m^3.
Il numero di moli del gas si ricava dall'equazione di stato dei gas perfetti nello stato C, note P_C e T_C.

$$n = \frac{P_C V_C}{RT_C} \tag{20}$$

Numericamente, n=0.081 mol.
Di seguito il quadro riassuntivo delle variabili termodinamiche per ciascuno stato.

	P	V	T
A	5 10^5 Pa	10^{-3} m^3	750 K
B	P_A	2 10^{-3} m^3	5 T_C
C	(1/5) P_A	V_B	300 K
D	(1/5) P_A	5 V_A	750 K

Tabella 1: Sommario delle variabili termodinamiche nei 4 stati del ciclo

La variazione di entropia su ciascuna trasformazione si calcola come segue:

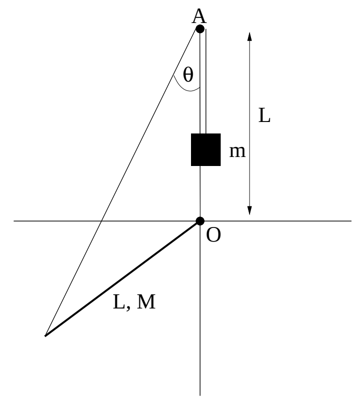
$$\begin{aligned} S_{AB} &= nc_P \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = nc_P ln \frac{T_B}{T_A} = 1.64 \ J/K \\ S_{BC} &= nc_V \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T} = nc_V ln \frac{T_C}{T_B} = -2.70 \ J/K \\ S_{CD} &= nc_P \int_{T_C}^{T_D} \frac{dT}{T} = nc_P ln \frac{T_D}{T_C} = 2.14 \ J/K \\ S_{DA} &= nR \int_{V_D}^{V_A} \frac{dV}{V} = nR ln \frac{V_A}{V_D} = -1.08 \ J/K \end{aligned} \tag{21}$$

Per verifica, la variazione complessiva di entropia nel ciclo interamente costituito da trasformazioni reversibili è zero.

Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 29/06/10

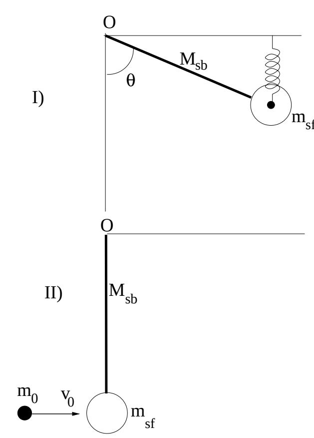
Esercizio 1

Una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza L è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo estremo fisso O. La sbarretta è sostenuta da una corda di massa trascurabile e lunghezza complessiva 2L che, tramite una piccola carrucola posta in A, mantiene sospeso un corpo di massa m=M/2. Individuare i valori di θ per i quali si realizza una condizione di equilibrio e discuterne la stabilità.



Esercizio 2

Un sistema meccanico (vedi figura) è costituito da una sbarra omogenea di massa M_{sb}=3 Kg e lunghezza l=1 m alla cui estremità è saldata una sfera omogenea di raggio r=10 cm e massa m_{sf}=300 g. Il sistema, vincolato a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il punto fisso O, è inizialmente in equilibrio grazie all'azione di una molla verticale applicata nel centro della sfera. La molla ha costante elastica k=100 N/m e lunghezza di riposo nulla. (I) Si determini il valore dell'angolo θ all'equilibrio. Successivamente la molla viene rimossa ed il sistema, libero di ruotare, urta in modo completamente anelastico in corrispondenza della verticale un proiettile di massa m_0 e velocità orizzontale v_0=30 m/s. (II) Si calcoli il valore della massa del proiettile che determina l'arresto del sistema subito dopo l'urto.



Esercizio 3

Un gas biatomico (2 moli) inizialmente nello stato A a temperatura T_A= 350 K e pressione P_A= $2{\cdot}10^5$ Pa, subisce un'espansione irreversibile fino a raggiungere uno stato B caratterizzato da un volume V_B= 0.3 m^3 e dalla temperatura T_B= 280 K. Nella trasformazione AB il gas assorbe una quantità di calore Q_{AB} = 7000 J da un termostato a temperatura T_A. Successivamente il gas viene compresso isotermicamente e reversibilmente fino allo stato C, dal quale viene riportato allo stato iniziale A con una ulteriore compressione adiabatica reversibile. Determinare il lavoro compiuto nella trasformazione AB, il volume dello stato C ed il calore scambiato nella trasformazione BC. Calcolare infine la variazione di entropia associata al ciclo descritto e commentare il risultato.

Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 29/06/2010

1 Quesito

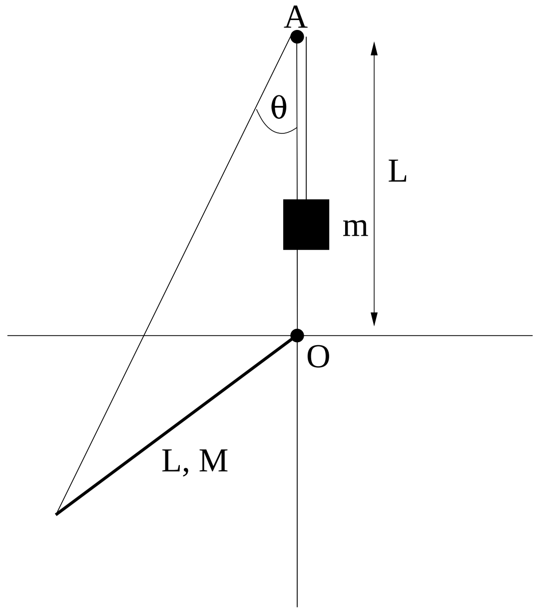


Figura 1: Quesito 1

La soluzione del quesito si può ricavare dallo studio dell'energia potenziale per il sistema constituito dalla sbarra e dal contrappeso (i vincoli sono lisci).

$$
\begin{aligned}
U(\theta) &= -\frac{1}{2}MgLcos2\theta + mg(L - (2L - 2Lcos\theta)) \\
U(\theta) &= -\frac{1}{2}MgLcos2\theta + mgL(2cos\theta - 1)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Il primo termine rappresenta l'energia potenziale associata alla forza peso applicata alla sbarretta (per ovvie ragioni geometriche l'angolo formato dalla sbarretta con la verticale è 2θ). Il secondo termine è l'energia potenziale associata al contrappeso. La sua quota infatti diminuisce, a partire dal massimo valore L, di una quantità pari alla lunghezza totale della fune

(2L) meno la lunghezza della base del triangolo isoscele che ha come lati la sbarretta ed il lato OA. Lo studio degli zeri della funzione derivata prima dell'energia potenziale fornisce i valori di θ per cui si realizza l'equilibrio per il sistema. (Le posizioni di equilibrio del sistema si possono anche ricavare imponendo che la risultate delle forze e dei momenti siano nulle, condizione di staticità).

$$\frac{dU}{d\theta} = Msen2\theta - 2msen\theta = 0 \tag{2}$$

Per m=M/2 si ottiene

$$\frac{dU}{d\theta} = sen\theta(2cos\theta - 1) = 0 \tag{3}$$

Le posizioni di equilibrio del sistema si ottengono dunque per senθ=0 (θ_{eq_1}=0°, θ_{eq_2}=180°) e per cosθ=1/2 (θ_{eq_3}=60°). La loro stabilità dipende dalla natura dei punti di stazionarietà della funzione derivata prima ricavabile dal segno della funzione derivata seconda:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = 2MgLcos2\theta - 2mgLcos\theta \tag{4}$$

Calcolando la funzione $\frac{d^2U}{d\theta^2}$ nei punti $\theta_{eq1,2,3}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_{eq_1}) > 0 \quad & \text{equilibrio stabile} \\ \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_{eq_2}) > 0 \quad & \text{equilibrio stabile} \\ \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_{eq_3}) < 0 \quad & \text{equilibrio instabile} \end{aligned} \tag{5}$$

2 Quesito

La soluzione alla prima domanda deriva dallo studio della configurazione di equilibrio per il sistema sbarra+sfera, calcolando i punti di stazionarietà per la funzione energia potenziale. A tale scopo, occorre innanzi tutto determinare la posizione del centro di massa del sistema. Per ragioni di simmetria, esso giacerà su una retta collineare alla sbarra e ad centro della sfera. Sfruttando le proprietà della definizione di centro di massa si può scrivere:

$$d_{cm} = \frac{m_{sb}\frac{L}{2} + m_{sf}(l + r)}{m_{sb} + m_{sf}} \tag{6}$$

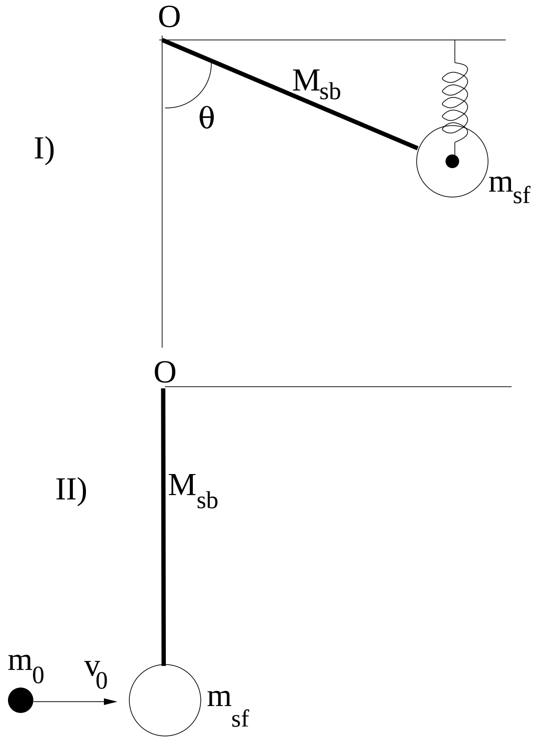


Figura 2: Quesito 2

in cui d_{cm} rappresenta la distanza del centro di massa del sistema dal punto fisso O. L'energia potenziale complessiva si può quindi esprimere come:

$$U(\theta) = -(m_{sb} + m_{sf})d_{cm}gcos\theta + \frac{1}{2}k[(r + l)cos\theta]^2 \tag{7}$$

Il primo termine rappresenta il contributo dovuto alla forza peso agente sul sistema complessivo sbarra+sfera, il secondo contributo è il termine dovuto alla forza elastica applicata nel centro della sfera. Imponendo che la derivata rispetto a θ sia nulla si ottiene (escludendo il caso $sen\theta$=0):

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = (m_{sb} + m_{sf})d_{cm}gsen\theta + k(r + l)^2cos\theta sen\theta = 0 \tag{8}$$

da cui si ricava

$$cos\theta_{eq} = \frac{(m_{sb} + m_{sf})d_{cm}g}{k(r + l)^2}$$

Numericamente, θ_{eq}=81.4°.

Una volta rimossa la molla, il sistema, libero di ruotare, raggiunge la posizione verticale ed urta anelasticamente la massa m_0. Nell'urto non si conserva l'energia cinetica e neppure la quantità di moto, a causa della presenza di forze di natura impulsiva (le reazioni vincolari applicate all'estremo fisso della sbarra O). Si conserva invece il momento angolare del sistema rispetto ad un polo coincidente con l'estremo fisso della sbarra O.

$$m_0 v_0 (l + r) - I_{tot}\omega_0 = I'_{tot}\omega' \tag{9}$$

ω_0 ed ω' rappresentano i moduli delle velocità angolari del sistema massa+sbarra (il cui momento di inerzia rispetto a un asse orizzontale passante per O è I_{tot}) subito prima dell'urto e del sistema sbarra+sfera+m_0 (il cui momento di inerzia rispetto ad un asse orizzontale passante per O è I'_{tot}) subito dopo l'urto. Il valore di ω_0 si ottiene applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica durante moto del sistema sbarra+sfera a partire dalla configurazione iniziale per θ=θ_{eq} fino al passaggio per la verticale (θ=0°).

$$-(m_{sb} + m_{sf})gd_{cm}cos\theta_{eq} = -(m_{sb} + m_{sf})gd_{cm} + \frac{1}{2}I_{tot}\omega_0^2 \tag{10}$$

Si ottiene:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2(m_{sb} + m_{sf})gd_{cm}}{I_{tot}}(1 - cos\theta_{eq})} \tag{11}$$

Sfruttando l'additività del momento di inerzia ed il teorema di Huyghens-Steiner

$$I_{tot} = \frac{1}{3}m_{sb}l^2 + \frac{2}{5}m_{sf}r^2 + m_{sf}(l + r)^2 \tag{12}$$

Infine, imponendo che la sbarra si arresti subito dopo l'urto (ω'=0) si ottiene il valore di m_0 richiesto.

$$m_0 = \frac{I_{tot}\omega_0}{v_0(l + r)} \tag{13}$$

Numericamente, m_0= 0.1956 kg

3 Quesito

In figura è rappresentato il ciclo termodinamico descritto nel quesito.

Il calcolo del lavoro associato alla trasformazione AB segue direttamente dal primo principio della termodinamica U_{AB} = Q_{AB} - L_{AB}, ovvero L_{AB} =

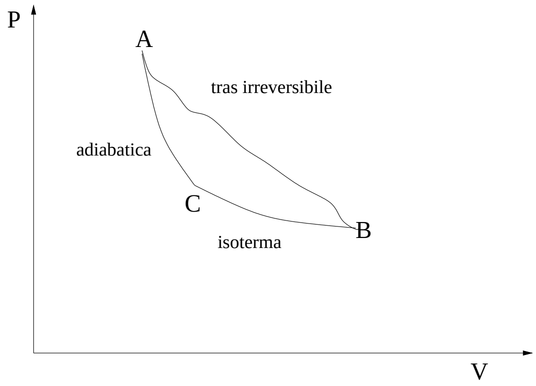


Figura 3: Quesito 3

Q_{AB} - nc_V (T_B - T_A). Numericamente, L_{AB}=9.91 kJ.
Il volume del gas nello stato C si determina sfruttando le prorietà delle trasformazioni adiabatiche reversibili.

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

in cui $\gamma = c_P/c_V = 7/5$ (gas biatomico). Risulta dunque

$$V_C = \left(\frac{T_A}{T_{B,C}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A$$

Numericamente, $V_C = 0.050$ m^3.
Il calore scambiato nella trasformazione CB si calcola osservando che per un'isoterma è $U_{BC} = 0$. Ciò implica $Q_{BC} = L_{BC}$.

$$Q_{BC} = L_{BC} = \int_B^C p dV = nRT_{B,C} \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_{B,C}\ ln\frac{V_C}{V_B} \qquad (14)$$

Numericamente, Q_{BC}=-8.34 kJ.
Infine il calcolo della variazione di entropia sulle singole trasformazioni si calcola come segue:

- trasfomazione AB (irreversibile). La variazione di entropia ad essa associata si può calcolare osservando che

$$S_{AB,irrev} = S_{AC,rev} + S_{CB,rev}$$

Poichè $S_{AC,rev}$=0 (AC è una trasformazione adiabatica reversibile) e CB è una trasformazione isoterma reversibile, si ottiene

$$S_{AB,irrev} = S_{CB,rev} = \int_C^B \frac{dQ_{CB}}{T_{B,C}} = nR\ ln\frac{V_B}{V_C}$$

Numericamente, $S_{AB,irrev}$=29.7 J/K.

- trasformazione BC, isoterma. Dai calcoli effettuati al punto precedente si ottiene $S_{BC,rev}$= - 29.7 J/K
- trasformazione CA (isoterma reversibile) $S_{CA,rev}$= 0 J/K

Tuttavia, l'irreversibilità della trasformazione AB ha delle conseguenze sulla variazione globale di entropia del sistema universo=gas+ambiente. Durante la trasformazione irreversibile AB vale infatti che:

$$S_{AB} > \int \frac{dQ_{AB,irr}}{T}$$

Nel caso specifico, la variazione complessiva di entropia dell'universo ΔS_{univ} è

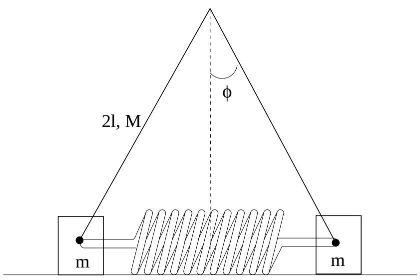
$$\Delta S_{univ} = -(\frac{Q_{AB}}{T_A} + S_{BC})$$

Numericamente, ΔS_{univ}= 9.7 J/K.

Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 13/09/10

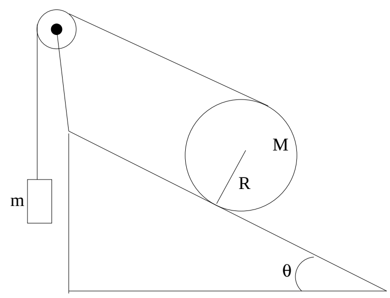
Esercizio 1

Un sistema meccanico è costituito da due sbarre omogenee identiche di lunghezza 2l, con l = 0.5 m, e massa M=2 kg, incernierate a due blocchetti, ciascuno di massa m= 1 kg. I due blocchetti sono appoggiati su un piano liscio e collegati da una molla la cui lunghezza di riposo corrisponde alla configurazione in cui l'angolo ϕ formato tra la verticale e la direzione di ciascuna sbarra è ϕ_0=30°. Si calcoli il valore della costante k della molla per cui l'equilibrio del sistema si stabilisce in ϕ=45°. Successivamente, le sbarre vengono rimosse ed il sistema blocchetti+molla, a partire dalla configurazione di equilibrio per il sistema precedente, viene lasciato libero di muoversi. Si descriva il moto risultante e se ne calcoli il periodo.



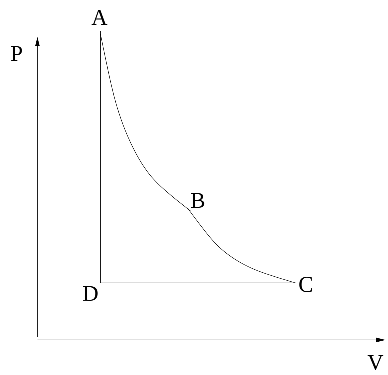
Esercizio 2

Un disco omogeneo di massa M = 10 kg e raggio R = 1 m è vincolato a rotolare senza strisciare lungo un piano inclinato (θ = 30°). Attorno al disco è avvolta una fune sottile inestensibile, che passa attraverso una puleggia di massa e attrito trascurabili a cui è appeso un blocchetto di massa m = 2 kg (vedi figura). Si determini l'accelerazione angolare del disco, la tensione della fune ed il valore minimo del coefficente d'attrito statico necessario per sostenere il moto di puro rotolamento.



Esercizio 3

In una macchina termica, 20 moli di gas biatomico eseguono il ciclo reversibile mostrato in figura, dove AB e un'espansione isoterma, BC un'espansione adiabatica, CD una compressione isobara e DA una trasformazione isocora. Nel punto A si ha P_A = 600 kPa e T_A = 500 K. Il volume in B e doppio rispetto al volume in A. La pressione in D è P_D= 100 kPa. Si determini la temperatura T_C, il lavoro totale compiuto dal gas in un ciclo ed il rendimento del ciclo.



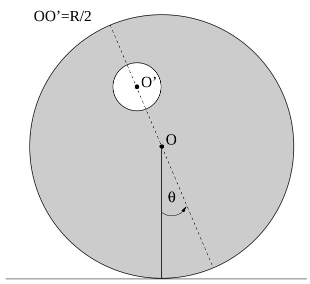
Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 20/07/10

Esercizio 1

Una sbarra omogenea di massa m=5 kg e lunghezza l=1 m è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo estremo fisso O. La sbarra è inizialmente in quiete nella posizione θ_0=80° (θ è l'angolo che essa forma con la verticale). A partire da questa configurazione, viene lasciata libera di muoversi. Si determini l'espressione del modulo della velocità del centro di massa della sbarra in funzione di θ. Si calcoli il modulo ed il verso delle componenti normale e tangenziale della reazione vincolare applicata alla sbarra in O per θ=30°.

Esercizio 2

Un sistema meccanico di massa M_0=3 kg è costituito da un disco omogeneo di centro O e raggio R=1 m nel quale è stato praticato un foro circolare di raggio r=R/4 il cui centro O' è posto a distanza R/2 dal punto O (vedi figura). Il sistema è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida orizzontale. Si calcoli la posizione del centro di massa ed il momento di inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al piano del foglio e passante per il centro di massa. Si determini inoltre il modulo ed il verso della forza orizzontale F che occorre applicare al bordo superiore del disco affinchè il sistema sia in equilibrio per θ=30°.



Esercizio 3

Dieci moli di gas perfetto monoatomico eseguono un ciclo termodinamico reversibile costituito da due isobare (AB e CD) e da due adiabatiche (BC e DA). Note le coordinate termodinamiche dello stato A (P_A = 100 kPa, V_A = 0.5 m^3, $V_A > V_B$), noto il valore del volume in B ($V_B = 0.5V_A$) e noto il valore della pressione in C ($P_C = 3P_A$), si calcoli il rendimento del ciclo e si verifichi che la variazione complessiva di entropia nel ciclo è nulla.