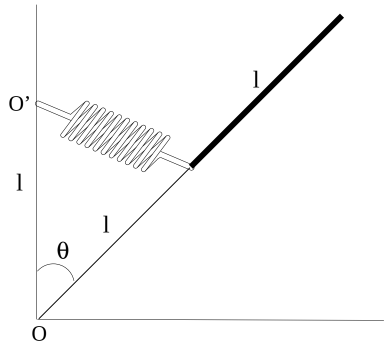
Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 15/07/2013

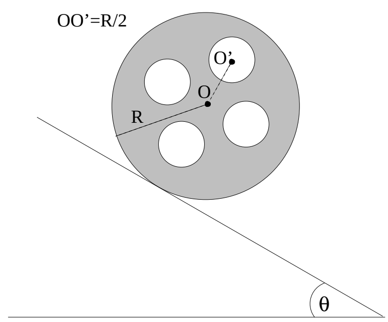
**Esercizio 1**

Ad una sbarra omogenea di massa $m_1$=2 kg e lunghezza l=1 m è saldata una seconda sbarra di pari lunghezza e massa $m_2$=3 kg. Il sistema è vincolato a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per l'estremo fisso O. Una molla di costante elastica k, fissata ad un guida verticale nel punto O' a distanza l da O, è ancorata al punto di contatto tra le due sbarre come mostrato in figura. La molla è a riposo quando l'angolo $\theta$ formato dalle sbarre con la guida verticale è 30°. Si determini il valore di k affinchè il sistema sia in equilibrio per $\theta$=45°.




**Esercizio 2**

Un sistema meccanico è costituito da un disco omogeneo di spessore trascurabile, densità superficiale $\sigma$=3 g/cm$^2$, e raggio R=20 cm. In esso sono stati praticati quattro fori circolari di raggio r=R/4 i cui centri sono posti a distanza R/2 dal centro del disco O (vedi figura). Il sistema, inzialmente fermo, comincia a rotolare senza strisciare su un piano inclinato di lunghezza l=3 m ($\theta$=30°). Si calcoli il momento di inerzia del sistema rispetto ad un asse perpendicolare al piano del foglio e passante per O ed il valore del coefficiente di attrito statico minimo affinchè durante il moto sia mantenuto il vincolo di puro rotolamento. Si determini infine il valore della velocità del centro di massa del sistema in fondo al piano inclinato.



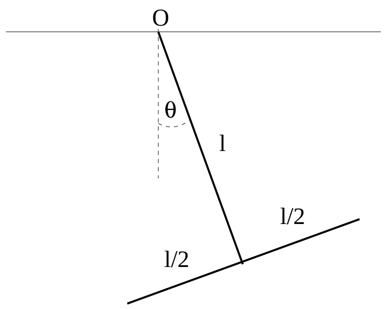

**Esercizio 3**

Un gas monoatomico (2 moli) inizialmente nello stato A a temperatura $T_A$= 300 K e pressione $P_A$= 2 $10^5$ Pa, subisce un'espansione irreversibile fino a raggiungere uno stato B caratterizzato da un volume $V_B$= 0.4 m$^3$ e dalla temperatura $T_B$= 200 K. Nella trasformazione AB il gas assorbe una quantità di calore $Q_{AB}$ = 6500 J da un termostato a temperatura $T_A$. Successivamente il gas viene compresso isotermicamente e reversibilmente fino allo stato C, dal quale viene riportato allo stato iniziale A con una ulteriore compressione adiabatica reversibile. Determinare il lavoro compiuto nella trasformazione AB, il volume dello stato C ed il calore scambiato nella trasformazione BC. Calcolare infine la variazione di entropia associata alla trasformazione AB.

Università del Salento - Ing. Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I - del 1/7/2013**

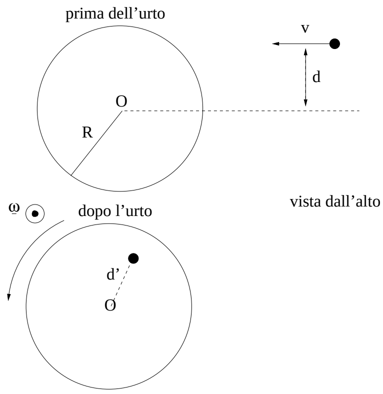
**Esercizio 1**

Un sistema meccanico è costituito da due sbarre omogenee di uguale massa (m=3 kg) e lunghezza (l=1 m) saldate a **T** come mostrato in figura. Il sistema, inizialmente in quiete nella posizione $\theta$=20°, viene lasciato libero di muoversi ruotando attorno ad un asse orizzontale passante per l'estremo fisso O. Si determini il modulo della velocità del centro di massa del sistema per $\theta$=0°. Si fornisca una stima del tempo necessario a raggiungere (la prima volta) tale configurazione motivando la procedura e dichiarandone i limiti di validità.




**Esercizio 2**

Un disco omogeneo di raggio R=1 m e massa M=2 kg, inizialmente fermo, è libero di ruotare in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Un proiettile di massa m=50 g si muove verso il disco con velocità costante v=215 m/s lungo una retta orizzontale posta a distanza d=60 cm da O. Il proiettile urta il disco in modo completamente anelastico e resta conficcato al suo interno ad una distanza d' dal centro (vedi figura). Si determini d' in modo che il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto sia $2\pi$ rad/s e si calcoli la percentuale di energia meccanica complessivamente dissipata nell'urto.




**Esercizio 3**

Due moli di gas perfetto biatomico espandono, a partire da uno stato iniziale A con volume $V_A$=2m$^3$, scambiando calore con un termostato a temperatura T= 300 K, fino a raggiungere lo stato B. Successivamente, il volume del gas è riportato al valore iniziale mantenendo costante la pressione (stato C, con $T_C$=200 K) ed infine, a chiusura del ciclo, la pressione viene incrementata fino a ripristinare il valore iniziale. Tutte le trasformazioni descritte (le si rappresenti graficamente) sono reversibili. Si calcoli la variazione di energia interna in ciascuna di esse ed il rendimento del ciclo. Si verifichi infine, sfruttando l'insieme di trasformazioni proposte, la sussistenza della relazione di Mayer ($c_P$ - $c_V$ = R).

**Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 1/07/2013**

# 1 Quesito 1)

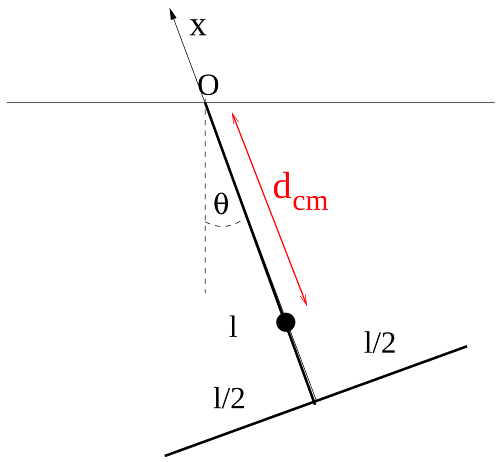



Figura 1: Quesito 1

La risposta alla prima domanda (valore della velocità del centro di massa del sistema costituito dalle due sbarre saldate a **T** in $\theta = 0°$) segue dal principio di conservazione dell'energia meccanica, applicabile in questo caso poichè i vincoli in O sono lisci. La posizione del centro di massa si determina sfruttando la simmetria del sistema (il centro di massa deve giacere sulla direzione individuata dalla sbarra direttamente fissata al perno). Definita un'ascissa x come mostrato in figura si può scrivere:

$$x_{CM} = \frac{0\ m + \frac{l}{2}m}{2m} = \frac{1}{4}l \tag{1}$$

La distanza del centro di massa da O, $d_{CM}$, è quindi $\frac{3}{4}l$.
Fissato il livello *zero* dell'energia potenziale gravitazionale in corrispondenza della quota di O [1], il principio di conservazione dell'energia meccanica conduce alla seguente relazione:

$$-2mgd_{CM}cos\theta_0 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 - 2mgd_{CM}cos\theta \tag{2}$$

[1] questa scelta è inizialmente arbitraria (contano le differenze di potenziale), ma una volta fissato lo zero occorre essere coerenti con la scelta fatta

in cui $\theta_0$ rappresenta il valore dell'angolo formato con la verticale all'istante iniziale (tutta l'energia del sistema è potenziale), $\omega$ è il modulo della velocità angolare ed $I_O$ è momento di inerzia del sistema complessivo rispetto ad un asse orizzontale passante per O. Utilizzando il teorema di Huygens-Steiner, e sfruttando l'additività del momento di inerzia, $I_O$ si può scrivere come segue:

$$I_O = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 + ml^2 = \frac{17}{12}ml^2 \tag{3}$$

Il primo termine si riferisce alla sbarra direttamente fissata al perno, il secondo rappresenta il momento di inerzia della seconda sbarra rispetto ad un asse orizzontale passante per il suo centro ed il terzo è il termine di Huygens-Steiner.
Valutando l'equazione 2 in $\theta$=0° e combinandola con l'equazione 3 si ricava che:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4mgd_{CM}}{I_O}\ (1 - cos\theta_0)} = \sqrt{\frac{36}{17}\ \frac{g}{l}\ (1 - cos\theta_0)} \tag{4}$$

in cui $\omega_0$ è il modulo della velocità angolare del sistema al passaggio per $\theta$=0°. Numericamente, $\omega_0$ = 1.11 rad/s. Il modulo della velocità del centro di massa del sistema si ricava notando che esso si muove su una traiettoria circolare di raggio $d_{CM}$, quindi $v_{CM}$=$\omega_0 d_{CM}$. Numericamente, $v_{CM}$=0.84 m/s.
La stima del tempo necessario a raggiungere per la prima volta la configurazione $\theta$=0°, si può ottenere osservando che il sistema è un pendolo fisico la cui equazione di moto si riduce a quella di un oscillatore armonico nel caso di piccole oscillazioni. L'equazione di moto del sistema si ricava utilizzando le equazioni cardinali o equivalentemente derivando rispetto al tempo la relazione 2 che esprime il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$I_O\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2mgd_{CM}sen\theta(t) = 0 \tag{5}$$

che per piccole oscillazioni ($sen\theta \sim \theta$) diviene :

$$I_O\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2mgd_{CM}\theta(t) = 0 \tag{6}$$

che descrive un moto puramente armonico con periodo T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{2mgd_{CM}}} \tag{7}$$

Il tempo $T_{1/4}$ impiegato a raggiungere per la prima volta la configurazione $\theta$=0° è quindi pari ad $\frac{1}{4}$ del periodo di un'oscillazione completa.

Numericamente, $T_{1/4}$=0.49 s.
Una verifica della ragionevolezza di questa approsimazione si può ottenere ricavando la velocità angolare del sistema nell'ipotesi di moto puramente armonico, e confrontando quindi il valore approssimato con quello esatto ricavato dal principio di conservazione dell'energia meccanica. Definita $\phi$ la pulsazione propria del moto armonico associato al sistema:

$$\phi = \sqrt{\frac{2mgd_{CM}}{I_O}} \tag{8}$$

il modulo della velocità angolare vale

$$\omega_{harm}(t) = \theta_0 \phi sen \phi t \tag{9}$$

che calcolata in t=$T_{1/4}$ conduce a $\omega_{harm}(T_{1/4})$=1.12 rad/s. Confrontando quest'ultimo valore con $\omega_0$ ottenuto nell'equazione 4 si osserva che l'approssimazione è verificata, date le specifiche condizioni iniziali di questo problema, a livello dell'1%.

# 2 Quesito 2)

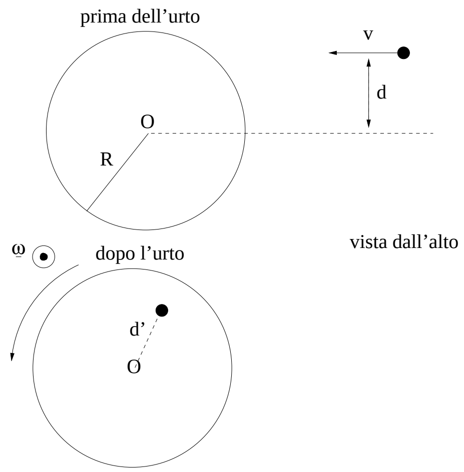



Figura 2: Quesito 2

La risposta ad entrambe le domande del quesito deriva dallo studio dell'urto tra il proiettile (particella puntiforme) e il disco (corpo rigido). Nell'urto non si conserva l'energia cinetica (urto anelastico) e neppure la quantità di moto, a causa dell'azione di forze di natura impulsiva (le reazioni vincolari applicate nel centro O del disco). Si conserva invece il momento angolare del sistema rispetto ad un polo coincidente con O, come espresso dalla seguente relazione:

$$mvd = I'_o \omega_f \tag{10}$$

Il primo termine rappresenta il momento angolare del sistema (disco + proiettile) immediatamente prima dell'urto (il disco è fermo e tutto il momento angolare è riconducibile al proiettile). Il secondo termine è il momento angolare del sistema subito dopo l'urto. $I'_O$ è il momento di inerzia complessivo rispetto ad un asse verticale passante per O e $\omega_f$ la velocità angolare del sistema immediatamente dopo l'urto (numericamente pari a $2\pi$ rad/s). In base alla definizione di momento di inerzia si ha che:

$$I'_O = \frac{1}{2}MR^2 + md'^2 \tag{11}$$

in cui $d'$ è la distanza dal centro a cui si arresta il proiettile dopo essersi conficcato nel disco. Combinando le equazioni 10 e 11, si ottiene:

$$d' = \sqrt{\frac{dv}{\omega_f} - \frac{1}{2}\frac{M}{m}R^2} \tag{12}$$

Numericamente, $d'$=0.73 m.
Il calcolo della percentuale di energia dissipata nell'urto si ricava dalla diminuizione $\Delta E$ di energia cinetica dovuta all'inelasticità dell'urto (l'energia "persa" è convertita in calore).

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I'_O\omega_f^2 \tag{13}$$

Numericamente, la percentuale di energia dissipata è il 98%.

# 3 Quesito 3)

La soluzione del terzo quesito deriva dallo studio delle proprietà delle trasformazioni che costituiscono il ciclo termodinamico. Dall'equazione di stato dei gas perfetti si determina il valore del volume nello stato B. A tale scopo, nota $T_C$, si determina $P_C$ ($V_C$=$V_A$, CA è isocora). Una volta ricavata $P_C$=$P_B$ (BC è isobara) si calcola $V_B$ ($T_B$=$T_A$, AB è isoterma). Numericamente $V_B$=3 $m^3$.

In figura sono rappresentate le trasformazioni reversibili che compongono il ciclo descritto nel testo.

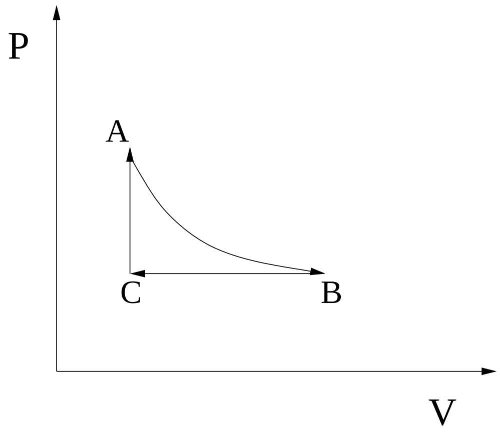



Figura 3: Quesito 3

- trasformazione A→B (isoterma) A livello infinitesimale si ha: $dU = 0 \rightarrow dQ = dL = pdV$ [2].

$$L_{AB} = \int_A^B pdV = \int_A^B nRT_{A/B}\frac{dV}{V} = nRT_{A/B}log\frac{V_B}{V_A} \tag{14}$$

  Numericamente $L_{AB} = Q_{AB} = 2021.65$ J

- trasformazione B→C (isobara). $Q_{BC}$=n$C_p$ ($T_C$-$T_B$) e $L_{BC}$=$P_{B,C}$ ($V_C$-$V_B$). Numericamente, $Q_{BC}$=-5817 J e $L_{BC}$=-1662 J. La variazione di energia interna $U_{BC}$=$Q_{BC}$-$L_{BC}$ è numericamente -4155 J.

- trasformazione C→A (isocora), $L_{CA}$=0. $U_{CA}$= $Q_{CA}$ = n$C_v$ ($T_A$-$T_C$). Numericamente, si ottiene $U_{CA}$= $Q_{CA}$ = 4155 J.

Il rendimento del ciclo termodinamico

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass}} = \frac{L_{AB} + L_{BC}}{Q_{AB} + Q_{CA}} \tag{15}$$

Numericamente, $\eta$=5.8%.

La verifica della relazione di Mayer segue dal fatto che la variazione di energia interna nella trasformazione isoterma AB è nulla.

[2]Si noti tuttavia che $dL$ e $dQ$, a differenza di $dU$, riferito ad una funzione di stato, non sono in generale differenziali esatti

$$U(B) - U(A) = U(C) - U(A) + U(B) - U(C) = 0$$

Poichè la trasformazione AC è isocora

$$U(C) - U(A) = nC_v(T_C - T_{A,B})$$

e la trasformazione BC è isobara

$$U(B) - U(C) = nC_p(T_{A,B} - T_C) - P_{C,B}(V_B - V_{C,A})$$

si ottiene, sostituiendo, la seguente relazione:

$$nC_v(T_C - T_{A,B}) + nC_p(T_{A,B} - T_C) - P_{C,B}(V_B - V_{C,A}) = 0$$

Osservando che $P_{C,B}V_B = nRT_{A,B}$ e che $P_{C,B}V_{C,A} = nRT_C$ si ottiene

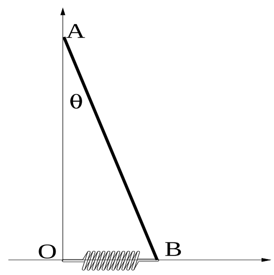
$$-nC_v(T_{A,B} - T_C) + nC_p(T_{A,B} - T_C) - nR(T_{A,B} - T_C) = 0$$

Ciò è verificato per $C_p - C_v = R$. Dunque la relazione di Mayer risulta verificata.

Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 5/09/2012

**Esercizio 1**

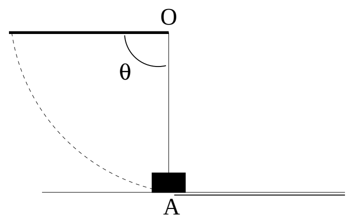
All'estremo B di una sbarra rigida, sottile ed omogenea di lunghezza 2l (l=1 m) e massa m=10 kg, è applicata una molla di costante elastica k, il cui estremo opposto è ancorato al punto fisso O. Le guide verticale e orizzontale lungo cui sono vincolati a muoversi rispettivamente gli estremi A e B della sbarra sono lisce e la molla è a riposo nella configurazione in cui $\theta$=30°.




Si calcoli il valore di k affinchè la sbarra sia in equilibrio nella configurazione $\theta$=45° e se ne discuta la stabilità.

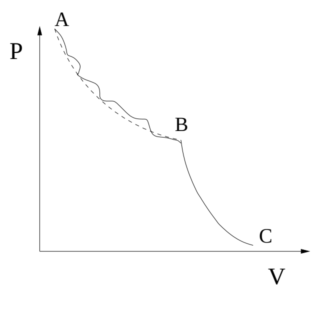
**Esercizio 2**

Un'asta rigida sottile ed omogenea di massa M=3 kg e lunghezza l=2 m è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il punto fisso O. L'asta, lasciata libera di muoversi a partire dalla configurazione $\theta$=90°, urta in modo completamente elastico una particella puntiforme situata sulla verticale, nel punto A. Dopo l'urto, l'asta rimane in quiete. Si calcoli la massa della particella e la sua velocità immediatamente dopo l'urto. Successivamente, la particella percorre un tratto rettilineo su una guida orizzontale scabra, caratterizzata da un coefficente di attrito dinamico $\mu_d$=0.7. Calcolare la distanza percorsa dalla massa dal punto A fino al punto in cui si arresta.




**Esercizio 3**

8 moli di gas perfetto biatomico, inizialmente in equilibrio nello stato A ($P_A$= $2\cdot10^5$ Pa, $V_A$=0.1m$^3$), si espandono liberamente fino a raggiungere un nuovo stato di equilibrio B. Successivamente, tramite una trasformazione adiabatica reversibile, il gas si porta in un nuovo stato d'equilibrio C ($V_C$=3$V_A$). Sapendo che la variazione di entropia tra A e C, $\Delta S_{AC}$=45.98 J/K, si calcolino: 1) i valori di pressione, volume e temperatura del gas nello stato B 2) i valori della pressione del gas nello stato C.



# Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 5/09/2012

## 1 Quesito

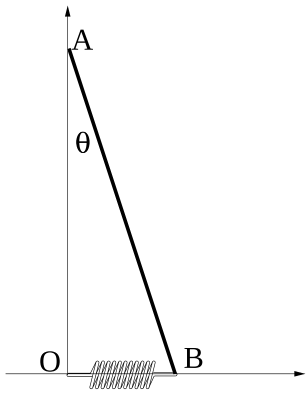



Figura 1: Quesito 1

La soluzione del primo quesito si ricava imponendo che l'energia potenziale complessiva associata al sistema meccanico abbia derivata nulla (condizione di equilibrio) nella configurazione in cui l'angolo $\theta$=45°. L'energia potenziale complessiva è:

$$U(\theta) = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k4l^2(\sin\theta - \sin\theta_0)^2 \tag{1}$$

Il primo termine rappresenta il contributo gravitazionale associato alla sbarra, il secondo quello associato alla forza elastica esercitata dalla molla. (Si è assunto come 0 dell'enegia potenziale gravitazionale il livello corrispondente ad y=0 rispetto ad un sistema di riferimento con asse x lungo il segmento orizzontale OB ed asse y verticale). Il termine associato alla forza elastica è ricavato sfruttando l'informazione che la lunghezza a riposo della molla si ha nella configurazione $\theta_0$=30° ed ha valore $2lsen\theta_0$. L'allungamento della molla per un generico angolo $\theta$ vale quindi $2l(sen\theta - sen\theta_0)$. Derivando rispetto a $\theta$ l'espressione in eq.1, si ottiene:

$$\frac{dU}{d\theta} = -mgl\sin\theta + 4kl^2(\sin\theta - \sin\theta_0)\cos\theta \tag{2}$$

Imponendo che $\frac{dU}{d\theta}$=0 in $\theta$=$\theta_{eq}$=45°, e risolvendo rispetto a $k$, si ottiene

$$k_{eq} = \frac{mg\tan\theta_{eq}}{4l(\sin\theta_{eq} - \sin\theta_0)} \tag{3}$$

Numericamente, $k_{eq}$=118.2 N/m
La risposta alla seconda domanda si ottiene studiando il segno della derivata seconda dell'energia potenziale

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -mgl\cos\theta + 4kl^2(\cos^2\theta) - 4kl^2\sin\theta(\sin\theta - \sin\theta_0) \tag{4}$$

valutata in $\theta$=$\theta_{eq}$ e $k$=$k_{eq}$:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_{eq}, k_{eq}) > 0 \tag{5}$$

Ne segue quindi che la configurazione descritta è di equilibro stabile.

# 2 Quesito

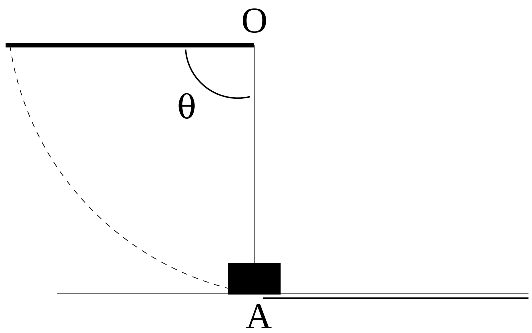



Figura 2: Quesito 2

Durante il moto della sbarra dalla configurazione con $\theta$=90° a quella con $\theta$=0°, l'energia meccanica si conserva (i vincoli sono lisci). Assumendo che il livello di zero dell'energia potenziale gravitazionale coincida con la quota del punto A, si ha, considerando la variazione di quota del centro di massa della sbarretta nel passaggio da una configurazione all'altra:

$$Mgl = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}Mgl \tag{6}$$

in cui $\omega_0$ rappresenta il modulo della velocità angolare della sbarra in $\theta$=0° (quindi subito prima dell'urto) ed $I = Ml^2/3$ è il momento di inerzia della sbarra rispetto ad un asse perpendicolare al piano del foglio e passante per O. Dall'eq.6, segue che:

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{l} \tag{7}$$

In corrispondenza di $\theta$=0°, la sbarra urta una particella puntiforme posta in A. Durante l'urto, 1) l'energia cinetica del sistema sbarra+particella si conserva poichè si tratta di un urto completamente elastico 2) la quantità di moto del sistema non si conserva a causa della presenza della reazione vincolare di natura impulsiva applicata alla sbarra in O 3) il momento angolare del sistema calcolato rispetto ad O si conserva poichè il momento delle forze esterne rispetto ad O è nullo. Segue che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 \qquad & \textit{conservazione dell'energia cinetica} \\ I\omega_0 = mlv_0 \qquad & \textit{conservazione del momento angolare} \end{aligned} \tag{8}$$

Elevando al quadrato la seconda equazione e dividendo membro a membro, si ricava:

$$m = \frac{I}{l^2} = \frac{1}{3}M \tag{9}$$

Sostituendo questo valore ad esempio nella seconda equazione del sistema 8 e sfruttando l'eq.7 si ottiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{MgI}{m^2 l}} = \sqrt{3lg} \tag{10}$$

Numericamente $m$=1 kg, $v_0$=7.6 m/s.
La risposta all'ultima domanda del quesito si ottiene considerando che nel tratto percorso dalla particella subito dopo l'urto, tutta l'energia inizialmente a disposizione viene dissipata a causa dell'azione della forza di attrito esercitata dal piano scabro ($|F_{attr}| = \mu_d|N| = \mu_d mg$, in cui $N$ è la reazione normale esercitata dal piano sulla particella durante il moto sulla guida orizzontale). Eguagliando quindi l'energia della particella subito dopo l'urto al lavoro fatto dalla forza di attrito lungo il cammino percorso prima di arrestarsi si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_d mgd \tag{11}$$

da cui

$$d = \frac{3l}{2\mu_d} \tag{12}$$

Numericamente, $d = 4.3$ m.

# 3 Quesito

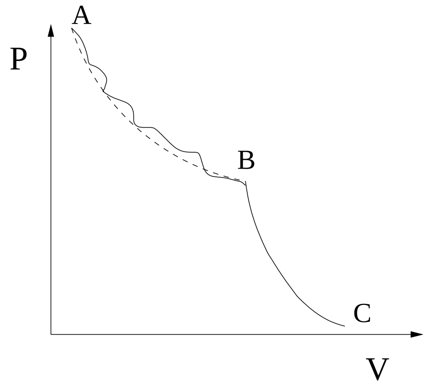



Figura 3: Quesito 3

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si determina il valore della temperatura del gas nello stato A, $T_A$= $P_A V_A/(N \cdot R)$. (N numero di moli). Numericamente si ha $T_A$=300,8 K. A partire da $T_A$ si ottiene automaticamente $T_B$, poichè in un'espansione libera per un gas perfetto vale $T_A$=$T_B$. Per il calcolo delle altre variabili termodinamiche nello stato B si sfrutta l'informazione sulla variazione di entropia nel passaggio dallo stato A allo stato C. Tale trasfomazione si compone di una trasformazione irreversibile (l'espansione libera AB) e di una trasformazione adiabatica reversibile. Per quest'ultima, la variazione di entropia è 0 e quindi $\Delta S_{AC}$ = $\Delta S_{AB}$. Poichè $T_A$=$T_B$, per calcolare la variazione di entropia tra A e B, si può utilizzare un'ipotetica trasformazione isoterma reversibile AB (linea tratteggiata in figura).

$$\Delta S_{AB_{rev}} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B nRT\frac{dV}{VT} = NRlog\frac{V_B}{V_A} \tag{13}$$

Nota $\Delta S_{AB}$, possiamo ricavare $V_B$ come segue:

$$\Delta S_{AB} = NRlog\frac{V_B}{V_A} \rightarrow \exp\frac{\Delta S_{AB}}{NR} = \frac{V_B}{V_A} \tag{14}$$

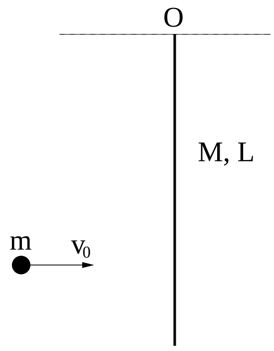
Numericamente si ottiene $V_B \sim 2\ V_A$= 0.2m$^3$.
Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava $P_B$= 0.5 $P_A$=$1 \cdot 10^5$ Pa.

La seconda parte dell'esercizio si risolve osservando che la trasformazione BC è adiabiatica e dunque vale $P_B V_B^\gamma$=$P_C V_C^\gamma$ con $\gamma$=7/5 (il gas è biatomico). Noto $V_C = 3V_A$ e con i valori $V_B$ e $P_B$ ricavati precedentemente si ottiene, $P_B$=$5.7 \cdot 10^4$ Pa

Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 10/09/2013

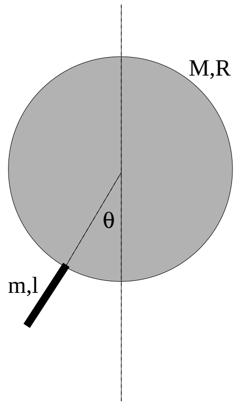
**Esercizio 1**

Una sbarra omogenea di lunghezza l=2 m e massa M= 3 kg, inizialmente in quiete, può ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo estremo fisso O. Un proiettile di massa m= 100 g e velocità $v_0$ urta la sbarra in corrispondenza di un punto posto ad una distanza (3/4)l da O. L'urto è istantaneo e completamente anelastico (il proiettile resta conficcato nella sbarra). Si determini l'espressione del modulo della velocità angolare del sistema sbarra+proiettile subito dopo l'urto e si calcoli il valore minimo di $v_0$ affinchè il sistema compia un giro completo.



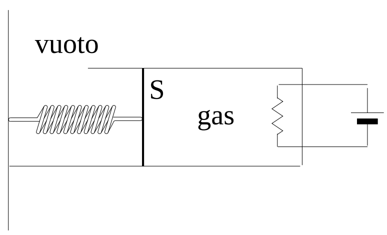

**Esercizio 2**

Un disco di massa M e raggio R è libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro fisso O. Una sbarra di lunghezza l e massa m è saldata al disco lungo la direzione radiale individuata dall'angolo $\theta$ che essa forma con la verticale (vedi figura). Si scriva l'equazione di moto del sistema disco+sbarra e, nel caso delle piccole oscillazioni, di derivi l'espressione della pulsazione del sistema in funzione di m, M, l ed R. Si verifichi che le dimensioni dell'espressione ottenuta siano corrette e se ne ricavi il valore numerico per m=1 kg, M= 2 kg, l=0.1 m ed R = 0.2 m.




**Esercizio 3**

Quattro moli di un gas monoatomico sono contenute in un recipiente a pareti adiabatiche delimitato da un pistone di sezione S = 0.2 $m^2$ (vedi figura). Il pistone è connesso a sua volta ad una molla di costante elastica k = 1000 N/m (si consideri trascurabile l'attrito tra il pistone e le pareti del recipiente). Inizialmente il gas occupa un volume $V_1$ = 2 $m^3$ e si trova alla temperatura $T_1$ = 300 K. Successivamente, il gas viene riscaldato lentamente, mediante una resistenza elettrica posta all'interno del recipiente. Il volume finale del gas è $V_2$ = 2.2 $m^3$. Si determini l'espressione della pressione del gas e della compressione della molla nello stato iniziale e la temperatura nello stato finale. Calcolare il lavoro compiuto dal gas nell'espansione e la quantità di calore fornita al gas dalla resistenza elettrica.



**Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 10/09/2013**

# 1 Quesito 1)

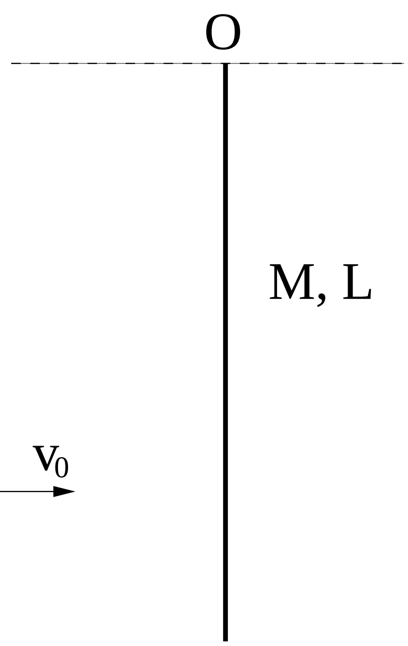



Figura 1: Quesito 1

Durante l'urto tra proiettile e sbarra non si conserva la quantità di moto a causa delle presenza delle reazioni vincolari di natura impulsiva applicate in O. Non si conserva neppure l'energia cinetica perchè si tratta di un urto completamente anelastico. Si conserva invece il momento angolare rispetto al polo O la cui componente $\mathcal{L}$ lungo la direzione dell'asse di rotazione vale:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4} L m v_0 = I\omega \tag{1}$$

il termine di sinistra rappresenta il modulo del momento angolare complessivo rispetto ad O subito prima dell'urto ed il termine di destra quello del sistema proiettile+sbarra subito dopo l'urto. I è il momento di inerzia rispetto ad un asse orizzontale passente per O ed $\omega$ è il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto. In particolare, per il teorema di Huygens-Steiner, si ha che:

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{3}{4}L\right)^2 \tag{2}$$

L'espressione di $\omega$ richiesta nel quesito si ricava dall'equazione 1:

$$\omega = \frac{\frac{3}{4}mL}{\frac{1}{3}ML^2 + \frac{9}{16}mL^2}v_0 \tag{3}$$

Subito dopo l'urto il moto del sistema è governato dal principio di conservazione dell'energia meccanica (la forza peso è conservativa e le reazioni vincolari in O non compiono lavoro), dalla cui applicazione si può anche desumere il valore minimo di $v_0$ affinchè il sistema compia un giro completo. Per ragioni di simmetria, la posizione del centro di massa del sistema proiettile+sbarra, si troverà lungo la direzione della sbarra ad una distanza $d_{CM}$ da O pari a:

$$d_{CM} = \frac{\frac{1}{2}ML + \frac{3}{4}mL}{M+m} \tag{4}$$

Condizione necessaria affinchè il sistema compia un giro completo è che il centro di massa raggiunga la massima quota. Fissato il livello *zero* dell'energia potenziale gravitazionale in corrispondenza della quota di O [1], si ottiene:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - (M+m)gd_{CM} = (M+m)gd_{CM} + \frac{1}{2}I\omega'^2 \tag{5}$$

Il termine a sinistra rappresenta l'energia meccanica del sistema (cinetica + potenziale) subito dopo l'urto, ossia nell'istante in cui sbarra+proiettile cominciano la rotazione attorno all'asse fisso orizzontale passante per O. Il termine a destra rappresenta l'energia meccanica del sistema nel punto di massima quota per il centro di massa ed $\omega'$ è il modulo della velocità angolare del sistema a tale quota. Per ricavare il valore minimo di $v_0$, assumiamo che, in questa configurazione, l'energia meccanica totale sia tutta e solo potenziale (quindi energia cinetica nulla, $\omega' = 0$). Osservando che $\omega = \mathcal{L}/I$ (si veda l'equazione 1):

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}^2}{I} \tag{6}$$

e sostituendo nell'equazione 5 si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}^2}{I} = 2(M+m)gd_{CM} = 2g\left(\frac{1}{2}M + \frac{3}{4}m\right)L \tag{7}$$

[1] questa scelta è inizialmente arbitraria (contano le differenze di potenziale), ma una volta fissato lo zero occorre essere coerenti con la scelta fatta

Nell'ultimo passaggio, si è utilizzata l'equazione 4. Sostituendo infine l'espressione di $\mathcal{L}$ e di I in quest'ultima equazione si ottiene:

$$v_0^2 = \frac{32}{9} gL \frac{\left(M + \frac{3}{2}M\right)\left(\frac{1}{3}M + \frac{9}{16}m\right)}{m^2} \tag{8}$$

Numericamente, $v_0$=152 m/s.

# 2 Quesito 2)

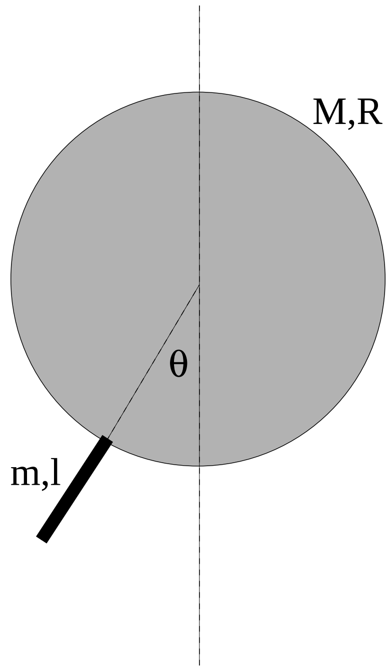



Figura 2: Quesito 2

Il sistema descritto (disco più sbarra) è in sostanza un pendolo fisico, vincolato a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il centro (fisso) O del disco. Il centro di massa del sistema, per ragioni di simmetria, si trova lungo la direzione della sbarra ad una distanza $d_{CM}$ da O:

$$d_{CM} = \frac{\left(R + \frac{l}{2}\right) m}{M + m} \tag{9}$$

L'equazione di moto segue dalla seconda equazione cardinale scritta rispetto ad un polo coincidente con O: $d\underline{L}/dt = \underline{\tau}^{\mathbf{ext}}$. Nel caso specifico, trattandosi di un corpo rigido e riferendosi alla componente lungo la direzione dell'asse di rotazione si ottiene:

$$I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M+m)gd_{CM} = -\left(R+\frac{l}{2}\right)mgsen\theta \tag{10}$$

in cui $\alpha$ rappresenta il modulo dell'accelerazione angolare, $\theta$ è l'angolo formato dalla direzione della sbarra con la verticale ed $I$ è il momento di inerzia complessivo del sistema (calcolato utilizzando il teorema di Huygens-Steiner):

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m\left(R+\frac{l}{2}\right)^2 \tag{11}$$

Nel caso delle piccole oscillazioni, l'equazione 10 diventa di tipo armonico

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(R+\frac{l}{2}\right)mg\theta \tag{12}$$

Si noti il segno "-" nelle equazioni 10 e 12. La sua presenza ha un preciso significato fisico. Esso stabilisce infatti il carattere di forza di richiamo della forza peso per il sistema descritto. Nel caso delle piccole oscillazioni tale forza è del tutto equivalente alla forza elastica esercitata da una molla su un oscillatore armonico. La pulsazione $\Omega$ corrispondente è:

$$\Omega = \frac{\left(R+\frac{l}{2}\right)mg}{I} = \frac{\left(R+\frac{l}{2}\right)mg}{\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m\left(R+\frac{l}{2}\right)^2} \tag{13}$$

Le dimensioni sono quelle attese, ovvero il reciproco di un tempo. Numericamente, $\Omega = 4.9\ \mathrm{s}^{-1}$.

# 3 Quesito 3)

La pressione esercitata dal gas sul pistone nello stato di equilibrio 1 sarà pari alla forza per unità di superficie esercitata dalla molla nella configurazione che corrisponde ad uno spostamento che definiamo $x_1$. Lo stesso vale nello stato di equilibrio 2. Valgono dunque le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \frac{kx_1}{S}V_1 &= nRT_1 \\ \frac{kx_2}{S}V_2 &= nRT_2 \end{aligned} \tag{14}$$

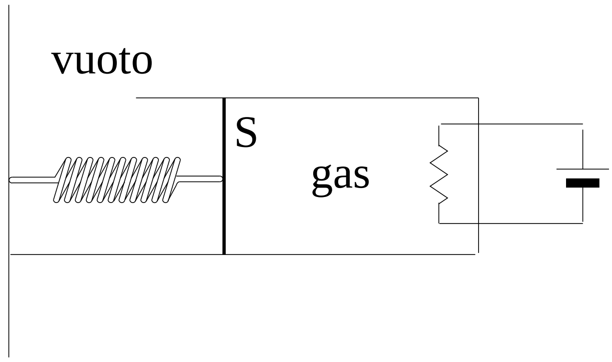



Figura 3: Quesito 3

e sulla base di considerazioni geometriche (scegliamo un sistema di riferimento in cui $x_2$ >0, $x_1$ >0 e $x_2 > x_1$ ):

$$x_2 - x_1 = \frac{V_2 - V_1}{S} \tag{15}$$

Dalla prima relazione nell' equazione 14 si ricava il valore di $x_1$ (numericamente 0.99 m) e dall'equazione 15 il valore di $x_2$ (numericamente 1.99 m). Il lavoro compiuto dal gas nell'espansione da $V_1$ a $V_2$ è uguale e opposto al lavoro compiuto della forza elastica nel passaggio da $x_1$ a $x_2$:

$$L_{1-2}^{gas} = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \tag{16}$$

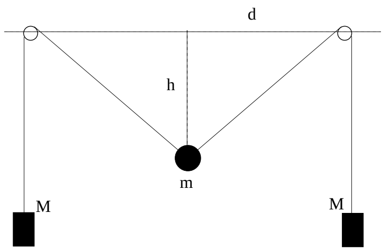
Numericamente, $L_{1-2}^{gas}$=1500 J.
Noto $x_2$, si determina $T_2$ dalla seconda equazione nell'espressione 14 (numericamente $T_2$ = 662 K). La variazone di energia interna $\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$, da cui $Q = \Delta U + L_{1-2}^{gas}$. Numericamente, $Q$ =19550 J.

# Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 12/7/2011

Università del Salento - CdL Ingegneria dell'Informazione

**Esercizio 1**

Una massa puntiforme m=1 kg è sostenuta da due funi inestensibili ciascuna di lunghezza L=0.8 m. Alle funi, tramite due carrucole fisse, sono appesi due blocchetti ciascuno di massa M= 3 kg. Si determini il valore della distanza h per cui il sistema è in equilibrio e la condizione di esistenza di tale configurazione. Per il calcolo si considerino trascurabili l'attrito tra fune e carrucola e le rispettive masse, e si assuma inoltre che, all'equilibrio, la distanza 2d tra le carrucole sia 1.5 m. Infine, a scelta, 1) si discuta la stabilità dell'equilibrio oppure 2) si calcoli la posizione del centro di massa del sistema complessivo.

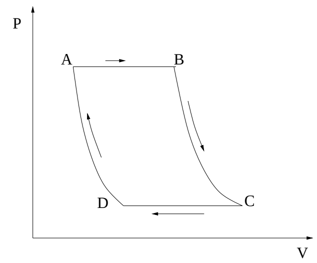



**Esercizio 2**

Un sistema meccanico costituito da una sbarra omogenea di massa M=5 kg e lunghezza l=1 m, inizialmente in equilibrio, è libero di ruotare in un piano verticale attorno ad un asse passante per un suo estremo fisso. Un proiettile di massa $m_0$= 10 g e velocità orizzontale $v_0$=30 m/s urta la sbarra in prossimità dell'estremo opposto ad O, conficcandosi in essa. Si determini il massimo valore dell'angolo formato dalla sbarra con la verticale nel moto successivo all'urto. Si calcoli l'intervallo di tempo dopo il quale occorre esplodere un secondo proiettile con le medesime caratteristiche del primo affinchè la sbarra sia intercettata nuovamente in corrispondenza del suo successivo passaggio per la verticale.

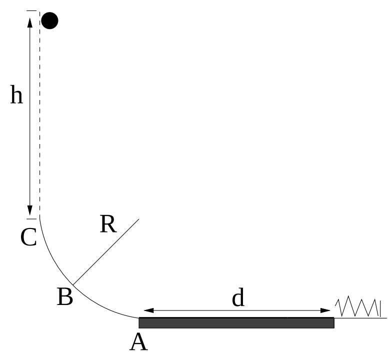
**Esercizio 3**

Un ciclo termodinamico eseguito da una macchina termica che utilizza 5 moli di gas perfetto è costituito da due trasformazioni isobare e due adiabatiche, tutte reversibili (vedi figura). Le due isobare AB e CD sono effettuate rispettivamente alle pressioni $P_A=P_B$= 2000 kPa e $P_C=P_D$= 1000 kPa. Il volume iniziale $V_A$ è pari a 0.005 $m^3$ e raddoppia per effetto dell'espansione isobara AB. Supponendo di poter effettuare il ciclo descritto sia con un gas monoatomico che con uno biatomico, determinare il rendimento del ciclo nei due casi, (specificando per quale gas è più elevato) e la variazione di entropia in ciascuna trasformazione.



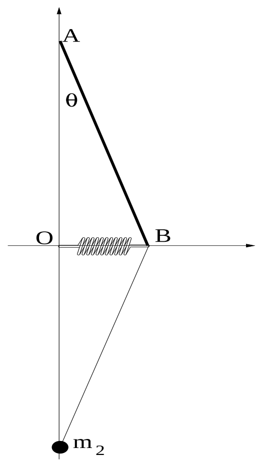
Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 12/12/11

**Esercizio 1**




Una particella puntiforme di massa m=0.1 kg cade da un'altezza h=2 m fino a raggiungere una guida circolare liscia di raggio R=1 m. La particella percorre un quarto di giro sulla guida e prosegue la sua corsa su un piano orizzontale scabro ($\mu_d = 0.3$). A distanza $d$ dal punto A (vedi figura) è posta una molla di costante elastica k=90 $Nm^{-1}$. Il piano è scabro fino al punto di contatto con la molla. a) Determinare il massimo valore di $d$ affinchè la particella, dopo l'impatto con la molla, raggiunga il punto B della guida, posto a metà della lunghezza dell'arco AC. b) Calcolare il valore della massima deformazione della molla.

**Esercizio 2**




Un sistema meccanico è costituito da un'asta rigida, sottile ed omogenea di lunghezza 2l (l=1 m) e massa $m_1$=20 kg. L'estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida verticale e l'estremo B lungo una guida orizzontale. In B è attaccata una fune inestensibile di lunghezza 2l che ha l'altro capo connesso con un punto materiale di massa $m_2$, vincolato a scorrere senza attrito sulla stessa guida verticale su cui scorre A. In B inoltre è applicata una molla di costante elastica k=100 N/m, vincolata a restare orizzontale e ancorata all'altro estremo al punto fisso O. La molla è a riposo nella configurazione in cui $\theta$=30°. Si calcoli il valore di $m_2$ affinchè il sistema sia in equilibrio nella configurazione $\theta$=45°.

**Esercizio 3**

Una mole di gas perfetto monoatomico è portata da uno stato iniziale A ($P_A$= $10^5$ Pa e volume $V_A$= 10 litri) ad uno stato finale B di pressione $2P_A$ e volume $2V_A$ attraverso i seguenti processi reversibili: 1) trasformazione isoterma fino a raddoppiare il volume e poi 2) trasformazione isocora fino allo stato finale B. Dopo aver rappresentato graficamente le trasformazioni descritte, calcolare: a) Il lavoro complessivo ed il calore scambiato nel passaggio da A a B; b) la variazione $\Delta U_{AB}$ di energia interna del gas; c) la variazione $\Delta S_{AB}$ di entropia del gas.

# Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 12/07/2011

## 1 Quesito

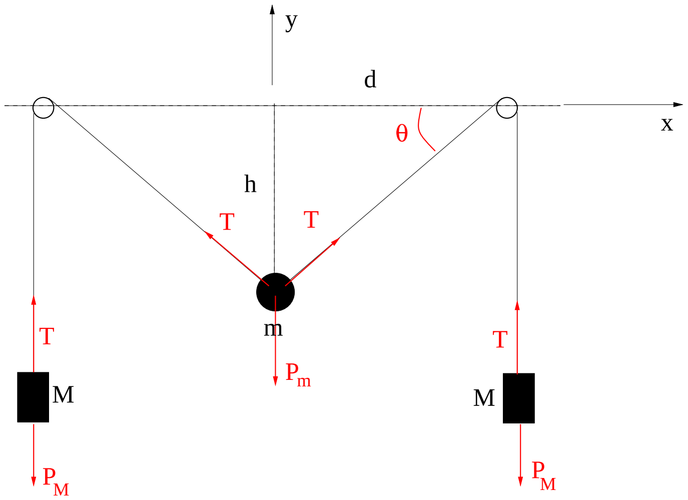



Figure 1: Quesito 1

La risposta alla prima domanda (il valore di h all'equilibrio e la condizione di esistenza di tale configurazione) si ottiene imponendo che la risultante delle forze agenti sulla massa m sia uguale a zero (metodo 1), oppure, equivalentemente, calcolando la funzione che esprime l'energia potenziale complessiva del sistema m+2M ed imponendo che essa abbia un punto di stazionarietà in corrispondenza della distanza d proposta nella traccia del quesito (metodo 2). Di seguito, verranno descritti entrambi i metodi.

### metodo 1

Le forze agenti sulla massa m sono le tensioni esercitate delle funi e la forza peso (vedi figura 1). Poichè sia le carrucole che le funi hanno massa trascurabile, il modulo della tensione T applicata su ciascun contrappeso M è uguale al modulo della tensione agente su ciascun lato di m. Si impone quindi che la risultante delle forze applicate ad m ed ai contrappesi M sia nulla lungo tutte le direzioni.

$$\begin{aligned} \text{asse y per M} \rightarrow \quad & T - Mg = 0 \\ \text{asse y per m} \rightarrow \quad & 2T\sin\theta - mg = 0 \\ \text{asse x per m} \rightarrow \quad & -T\cos\theta + Tcos\theta = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Combinando la prima e la seconda equazione, ed esprimendo $\sin\theta$ in funzione delle lunghezze h e d ($\sin\theta\sqrt{d^2+h^2} = h$) si ottiene:

$$\frac{2M}{m} = \frac{\sqrt{d^2+h^2}}{h} \tag{2}$$

Il valore di h all'equilibrio (nota d) è quindi:

$$h = \frac{d}{\sqrt{\frac{4M^2}{m^2} - 1}} \tag{3}$$

Dalla relazione precedente si deduce immediatamente la condizione di esistenza della soluzione (e quindi della configurazione di equilibrio discussa). Ovvero:

$$2M > m \tag{4}$$

condizione verificata nel caso posto dal quesito. Numericamente, h, nella configurazione di equilibrio descritta, vale 0.13 m.

## metodo 2

Lo stesso risultato si può ottenere utilizzando la funzione che descrive l'energia potenziale del sistema complessivo costituito dai due contrappesi M e dalla massa m. Quest'ultima, tutta riconducibile all'azione della forza gravitazionale, si può esprimere in funzione di h (che costituisce l'unico grado di libertà del sistema). Assumendo che l'energia potenziale gravitazionale sia nulla in corrispondenza dell'asse x (y=0), si ottiene:

$$U(h) = -mgh - 2Mg(L - \sqrt{d^2+h^2}) \tag{5}$$

La quota a cui si trova ciascun contrappeso, infatti, è correlata ad h, ed è data dalla lunghezza complessiva della fune (uguale ad L) meno il tratto compreso tra la puleggia e la massa m (uguale a $\sqrt{d^2+h^2}$). Derivando rispetto ad h la funzione data nell'equazione 5, ed imponendo che la derivata sia nulla in corrispondenza del valore di d assegnato nella traccia (2d=1.5 m), si ottiene:

$$\frac{dU}{dh} = -mg + 2Mg\frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2)}} = 0 \tag{6}$$

Da cui:

$$\frac{2M}{m} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{h} \tag{7}$$

cioè lo stesso risultato fornito dal metodo 1 (si confronti con l'equazione 2). La natura di questa posizione di equilibrio si deduce stabilendo se essa corrisponda ad un punto di minimo (equilibrio stabile) o di massimo (equilibrio instabile). Derivando la funzione energia potenziale due volte rispetto ad h si ottiene:

$$\frac{d^2U}{dh^2} = \frac{2M}{\sqrt{d^2 + h^2)}}\left(1 - \frac{1}{\frac{d^2}{h^2} + 1}\right) > 0 \tag{8}$$

ovvero, essendo essa sempre positiva, la posizione di equilibrio risulta stabile per ogni valore di h a patto che sia verificata la condizione di esistenza espressa dall'equazione 4.
Il calcolo del centro di massa del sistema complessivo si ottiene infine applicando la definizione corrispondente. In particolare, si osserva che, nel sistema di riferimento definito in figura 1 e vista la simmetria del problema, la coordinata $X_{cm}$ coincide con l'origine x=0. La coordinata $Y_{cm}$ si ottiene dalla media pesata delle distanze dall'origine dei singoli corpi che costituiscono il sistema.

$$Y_{cm} = \frac{-mh - 2M(L - \sqrt{d^2 + h^2})}{m + 2M} \tag{9}$$

Numericamente, $Y_{cm}$ = -5.2 cm.

# 2 Quesito

Le tre fasi che caratterizzano l'evoluzione temporale del sistema descritto nel quesito sono rappresentate in figura 2. Durante l'urto (fase I) NON si conserva l'energia cinetica poichè l'urto è completamente anelastico (la massa $m_0$ resta conficcata nella sbarra). NON si conserva neppure la quantità di

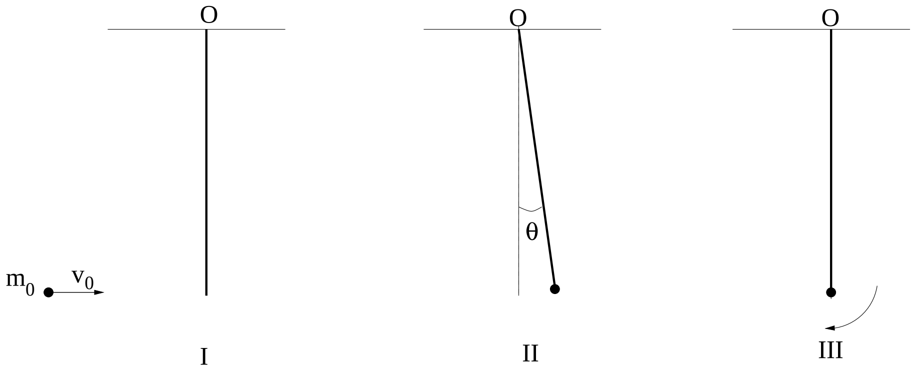



Figure 2: Quesito 1

moto, a causa dell'azione di forze di natura impulsiva durante l'urto (a causa cioè delle reazioni vincolari applicate all'estremo fisso O della sbarra). Si conserva invece il momento angolare rispetto ad un polo coincidente con O poichè è nulla rispetto ad esso la risultante dei momenti delle forze esterne. Si ha quindi che:

$$m_0 v_0 l = I'_O \omega_0 \tag{10}$$

in cui $\omega_0$ rappresenta il modulo della velocità angolare del sistema sbarra+proiettile subito dopo l'urto e $I'_O$ è il momento di inerzia rispetto ad un asse orizzontale passante per O. In particolare:

$$I'_O = \frac{1}{3} M l^2 + m_0 l^2 \tag{11}$$

Dall'equazione 10 si ricava inoltre che:

$$\omega_0 = \frac{m v_0 l}{I'_O} \tag{12}$$

Numericamente, $\omega_0$= 0.18 rad/s.
Subito dopo l'urto, il sistema comincia a ruotare fino a che il suo centro di massa raggiunge la quota a cui corrisponde il massimo valore dell'angolo $\theta$. Il vincolo in O è liscio e questa condizione implica che l'energia meccanica del sistema si conserva durante il moto. In particolare l'energia cinetica si converte progressivamente in energia potenziale fino al raggiungimento del massimo valore di $\theta$ (l'energia diventa tutta potenziale).

$$-g(m_0 + M) d_{cm} \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} I' \omega_0^2 - (m_0 + M) g d_{cm} \tag{13}$$

$d_{cm}$, che rappresenta la distanza del centro di massa del sistema dal punto O, si calcola come segue:

$$d_{cm} = \frac{Ml/2 + m_0 l}{M + m_0} \tag{14}$$

Tuttavia si verifica numericamente che $d_{cm} \sim l/2$ con un'approssimazione migliore dell'1%, quindi il contributo della massa $m_0$ non è sufficiente a modificare in modo significativo il centro di massa del sistema complessivo rispetto a quello della sbarra.
Dall'equazione 13 si ottiene:

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{I_O \omega_0^2}{2(m_0 + M) g d_{cm}} \tag{15}$$

Numericamente $\theta_{max} = 2.7°$.
Poichè si tratta di un angolo molto piccolo che, una volta espresso in radianti, può essere confuso con grande precisione con il suo seno, il regime di moto del sistema complessivo è quello di un pendolo fisico che compie piccole oscillazioni di tipo armonico il cui periodo è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{(m_0 + M) g d_{cm}}} \tag{16}$$

L'intervallo di tempo dopo cui occorre esplodere un secondo proiettile con la stessa velocità del primo in modo tale che la collisione avvenga quando il sistema ripassa da $\theta = 0°$ è pari ad 1/2 del periodo totale (ovvero il tempo impiegato nel tragitto $\theta = 0° \rightarrow \theta_{max} \rightarrow 0°$). Numericamente, $T/2$=0.82 s.

# 3 Quesito

La risoluzione del quesito richiede la determinazione delle variabili termodinamiche associate a ciascuno dei quattro stati che costituiscono il ciclo. Nota $P_A$=$P_B$, utilizzando l'equazione di stato per i gas perfetti $PV = nRT$ ed il fatto che la trasformazione AB è isobara, si ricavano le temperature $T_A$ e $T_B$. Le variabili termodinamiche degli stati C e D si ricavano dalla relazione $PV^\gamma$=costante, valida per trasformazioni adiabatiche con $\gamma = C_p/C_v = 5/3$ (7/5) nel caso di un gas monoatomico (biatomico).

$$\begin{aligned} P_B V_B^\gamma &= P_C V_C^\gamma \\ P_D V_D^\gamma &= P_A V_A^\gamma \end{aligned} \tag{17}$$

Ovvero:

$$V_C = V_B \frac{P_B}{P_C}^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$V_D = V_A \frac{P_A}{P_D}^{\frac{1}{\gamma}} \tag{18}$$

La tabella sottostante mostra un quadro riassuntivo dei valori delle grandezze termodinamiche nei rispettivi stati nell'ipotesi di gas monoatomico (ed in parentesi i valori nel caso in cui si tratti di un gas biatomico).

| | Volume | Pressione | Temperatura |
|---|---|---|---|
| A | $0.005m^3$ | 2000kPa | $T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 241K$ |
| B | $0.010m^3$ | 2000kPa | $T_B = 2T_A$ |
| C | $0.0151(0.0164)m^3$ | 1000kPa | $T_C = 361(395)K$ |
| D | $0.0075(0.0082)m^3$ | 1000kPa | $T_D = 180(197)K$ |

Il calore scambiato nelle trasformazioni AB e CD è dato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= nC_p(T_B - T_A) > 0 \\ Q_{BC} &= 0 \\ Q_{CD} &= nC_p(T_D - T_C) < 0 \\ Q_{DA} &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

$Q_{BC} = Q_{DA} = 0$ perchè BC e DA sono trasformazioni adiabatiche reversibili. Il rendimento $\eta$ del ciclo considerato è:

$$\eta = \frac{Q_{scambiato}}{Q_{assorbito}} = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB}} \tag{20}$$

Numericamente, $\eta$=24% (18% nel caso del gas biatomico).
Infine, le variazioni di entropia su ciascuna trasformazione del ciclo si calcolano come segue:

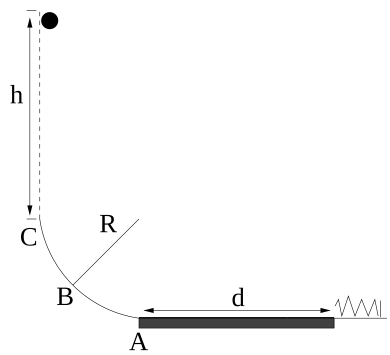
$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= \int_A^B \frac{dQ}{T} = nC_P ln\frac{T_B}{T_A} = nC_P ln2 \\ \Delta S_{BC} &= 0 \\ \Delta S_{CD} &= \int_C^D \frac{dQ}{T} = nC_P ln\frac{T_D}{T_C} = nC_P ln\frac{1}{2} \\ \Delta S_{DA} &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Numericamente, $\Delta S_{AB} = -\Delta S_{CD}$= 72 J/K (101 J/K nel caso del gas biatomico). Da ciò risulta inoltre verificato che la variazione complessiva di entropia in un ciclo di trasformazioni reversibili $\Delta S_{ABCD}$=0.

Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 12/12/11

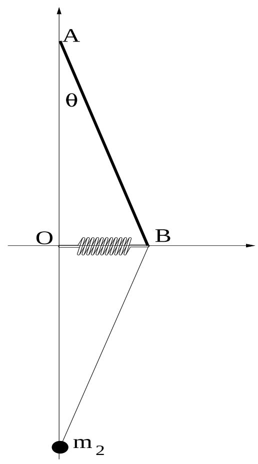
**Esercizio 1**

Una particella puntiforme di massa m=0.1 kg cade da un'altezza h=2 m fino a raggiungere una guida circolare liscia di raggio R=1 m. La particella percorre un quarto di giro sulla guida e prosegue la sua corsa su un piano orizzontale scabro ($\mu_d = 0.3$). A distanza $d$ dal punto A (vedi figura) è posta una molla di costante elastica k=90 Nm$^{-1}$. Il piano è scabro fino al punto di contatto con la molla. a) Determinare il massimo valore di $d$ affinchè la particella, dopo l'impatto con la molla, raggiunga il punto B della guida, posto a metà della lunghezza dell'arco AC. b) Calcolare il valore della massima deformazione della molla.




**Esercizio 2**

Un sistema meccanico è costituito da un'asta rigida, sottile ed omogenea di lunghezza 2l (l=1 m) e massa $m_1$=20 kg. L'estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida verticale e l'estremo B lungo una guida orizzontale. In B è attaccata una fune inestensibile di lunghezza 2l che ha l'altro capo connesso con un punto materiale di massa $m_2$, vincolato a scorrere senza attrito sulla stessa guida verticale su cui scorre A. In B inoltre è applicata una molla di costante elastica k=100 N/m, vincolata a restare orizzontale e ancorata all'altro estremo al punto fisso O. La molla è a riposo nella configurazione in cui $\theta$=30°. Si calcoli il valore di $m_2$ affinchè il sistema sia in equilibrio nella configurazione $\theta$=45°.




**Esercizio 3**

Una mole di gas perfetto monoatomico è portata da uno stato iniziale A ($P_A$= $10^5$ Pa e volume $V_A$= 10 litri) ad uno stato finale B di pressione $2P_A$ e volume $2V_A$ attraverso i seguenti processi reversibili: 1) trasformazione isoterma fino a raddoppiare il volume e poi 2) trasformazione isocora fino allo stato finale B. Dopo aver rappresentato graficamente le trasformazioni descritte, calcolare: a) Il lavoro complessivo ed il calore scambiato nel passaggio da A a B; b) la variazione $\Delta U_{AB}$ di energia interna del gas; c) la variazione $\Delta S_{AB}$ di entropia del gas.

# Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 12/12/2011

## 1 Quesito 1

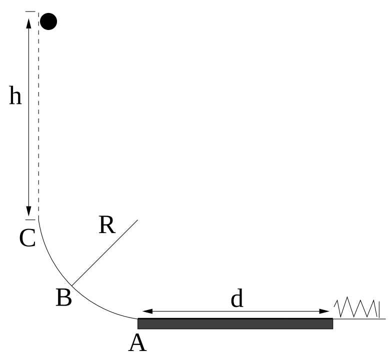



Figura 1: Quesito 1

La soluzione alla prima domanda deriva dallo studio del bilancio energetico nella varie configurazioni. In particolare vale che:

$$mg(h+R) = \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{1}$$

in cui il termine a sinistra rappresenta l'energia potenziale della massa m all'istante iniziale e $v_A$ è la velocità di m al passaggio per il punto A. Negli istanti successivi la partcella attraverserà il piano scabro, dunque parte della sua energia meccanica sarà dissipata per effetto della forza di attrito $F_A$. In particolare, il lavoro compiuto da $F_A$ nel tratto orizzontale di lunghezza $d$ è pari a $\mu_d dmg$ . Il bilancio energetico, dopo il contatto con la molla, si può scrivere come segue:

$$mg(R - R\frac{\sqrt{2}}{2}) = mg(h+R) - 2\mu_d dmg \tag{2}$$

in cui il termine a sinistra rappresenta l'energia meccanica nel punto C nell'ipotesi che la particella vi arrivi con velocità nulla. Il termine a destra rappresenta l'energia meccanica nel punto A, ovvero tutta l'energia meccanica a disposizione meno l'energia dissipata per attrito (il fattore 2 tiene conto dell'energia dissipata all'"andata" ed al "ritorno"). Risolvendo rispetto a $d$ si ottiene:

$$d = \frac{1}{2\mu_A}(h + \frac{R\sqrt{2}}{2}) \tag{3}$$

Numericamente, d=4.5 m.

La seconda parte del problema si risolve osservando che:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mg(h + R) - \mu_d dmg \tag{4}$$

in cui il termine a sinistra rappresenta l'energia potenziale associata alla molla nella configurazione di massima deformazione $x$. Risolvendo rispetto ad x si ottiene

$$x = \sqrt{\frac{2mg(h + R - \mu_d d)}{k}} \tag{5}$$

Numericamente x=0.19 m

# 2 Quesito 2

La soluzione del primo quesito si ricava imponendo che l'energia potenziale complessiva associata al sistema meccanico abbia derivata nulla (condizione di equilibrio) nella configurazione in cui l'angolo $\theta$=45°. L'energia potenziale complessiva è:

$$U(\theta) = m_1 glcos\theta + \frac{1}{2}k4l^2(sen\theta - sen\theta_0)^2 - 2m_2 glcos\theta \tag{6}$$

Il primo termine rappresenta il contributo gravitazionale associato alla sbarra, il secondo quello associato alla forza elastica esercitata dalla molla, il terzo quello gravitazionale associato alla massa puntiforme $m_2$. (Si è assunto come 0 dell'energia potenziale gravitazionale il livello corrispondente ad y=0 rispetto ad un sistema di riferimento con asse x lungo il segmento orizzontale OB ed asse y verticale). Il termine associato alla forza elastica è ricavato sfruttando l'informazione che la lunghezza a riposo della molla si ha nella configurazione $\theta_0$=30° ed ha valore $2lsen\theta_0$. L'allungamento della molla per

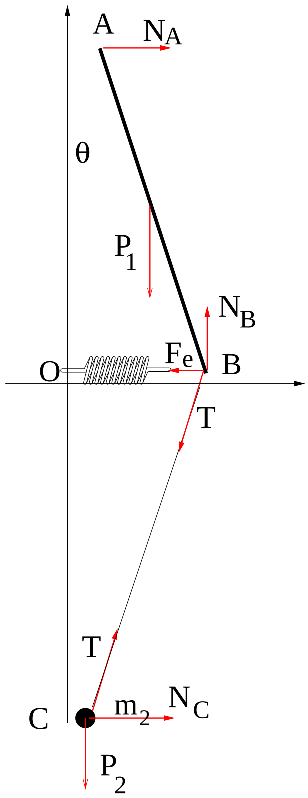



Figura 2: Quesito 2. Diagramma delle forze applicate alla sbarra ed alla massa $m_2$

un generico angolo $\theta$ vale quindi $2l(sen\theta - sen\theta_0)$. Derivando rispetto a $\theta$ l'espressione in eq.6, si ottiene:

$$\frac{dU}{d\theta} = -m_1 glsen\theta + 4kl^2(sen\theta - sen\theta_0)cos\theta + 2m_2 glsen\theta \qquad (7)$$

Imponendo che $\frac{dU}{d\theta}$=0 in $\theta$=$\theta_{eq}$=45°, e risolvendo rispetto ad $m_2$, si ottiene

$$m_2 = \frac{m_1}{2} - \frac{2kl}{gtan\theta_{eq}}(sen\theta_{eq} - sen\theta_0) \qquad (8)$$

Numericamente, $m_2$=5.8 kg.
La soluzione del quesito si può ottenere equivalentemente imponendo che la risultante delle forze esterne applicate alla sbarra ed alla massa $m_2$ sia nulla

(vedi figura 2.)

$$\begin{array}{ll} sbarra,\ lungo\ x & N_A - 2kl(sen\theta - sen\theta_0) - Tsen\theta = 0 \\ sbarra,\ lungo\ y & N_B - m_1 g - Tcos\theta = 0 \\ massa,\ lungo\ x & N_C + Tsen\theta = 0 \\ massa,\ lungo\ y & Tcos\theta - m_2 g = 0 \end{array} \tag{9}$$

Si richiede inoltre che la risultante dei momenti delle forze applicate alla sbarra (ad esempio calcolati rispetto al punto A) sia nulla:

$$m_1 glsen\theta + 2lk(sen\theta - sen\theta_0)cos\theta + 2lTsen(2\theta) - 2lN_B sen\theta = 0 \tag{10}$$

Ricavando ad esempio $T$ ed $N_B$ dall'equazione 9 e sostituendo nell'equazione 10 si ricava il valore di $m_2$, identico a quello dato nell'equazione 8.

# 3 Quesito 3

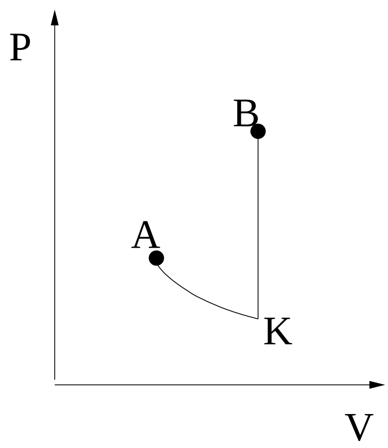



Figura 3: Quesito 3

In figura 3 è rappresentato il ciclo descritto nel testo, composto da una trasformazione isoterma AK e da una trasformazione isocora KB. Dalla relazione dei gas perfetti si ricava il valore della temperatura in A ed in B, rispettivamente $T_A$ = 120 K e $T_B$ = 480 K Nella trasformazione isoterma AK si ha $\Delta U_{AK}$=0, ovvero $\Delta L_{AK} = \Delta Q_{AK}$.

$$\Delta L_{AK} = \int_A^K \frac{nRT_A}{V} dV = nRTln\frac{V_K}{V_A} = nRTln2 \tag{11}$$

Numericamente, $\Delta L_{AK} = \Delta Q_{AK}$=691J

Nella trasformazione isocora KB si ha $\Delta L_{KB}$=0.

$$\Delta Q_{KB} = nc_V(T_B - T_K) = \Delta U_{KB} \tag{12}$$

Numericamente $\Delta Q_{KB}$=4500 J.
Il calore totalmente assorbito nel passaggio da A a B risulta dunque $\Delta Q_{AB}$=5190 J ed il lavoro scambiato $\Delta L_{AB}$=691J.
Il calcolo dell'entropia segue dalla definizione

$$\Delta S_{AB} = \int_A^K \frac{dQ}{T} + \int_K^B \frac{dQ}{T}$$

$$\Delta S_{AB} = \int_A^K \frac{nRdV}{V} + \int_K^B \frac{nc_v dT}{T} = nRln2 + \frac{3}{2}nRln4 \tag{13}$$

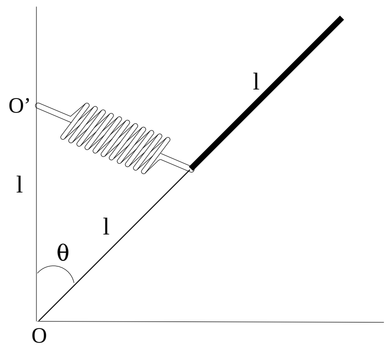
Numericamente $\Delta S_{AB}$=23J/K

Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 15/07/2013

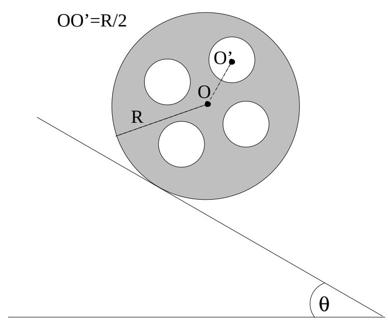
**Esercizio 1**

Ad una sbarra omogenea di massa $m_1$=2 kg e lunghezza l=1 m è saldata una seconda sbarra di pari lunghezza e massa $m_2$=3 kg. Il sistema è vincolato a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per l'estremo fisso O. Una molla di costante elastica k, fissata ad un guida verticale nel punto O' a distanza l da O, è ancorata al punto di contatto tra le due sbarre come mostrato in figura. La molla è a riposo quando l'angolo $\theta$ formato dalle sbarre con la guida verticale è 30°. Si determini il valore di k affinchè il sistema sia in equilibrio per $\theta$=45°.




**Esercizio 2**

Un sistema meccanico è costituito da un disco omogeneo di spessore trascurabile, densità superficiale $\sigma$=3 g/cm$^2$, e raggio R=20 cm. In esso sono stati praticati quattro fori circolari di raggio r=R/4 i cui centri sono posti a distanza R/2 dal centro del disco O (vedi figura). Il sistema, inzialmente fermo, comincia a rotolare senza strisciare su un piano inclinato di lunghezza l=3 m ($\theta$=30°). Si calcoli il momento di inerzia del sistema rispetto ad un asse perpendicolare al piano del foglio e passante per O ed il valore del coefficiente di attrito statico minimo affinchè durante il moto sia mantenuto il vincolo di puro rotolamento. Si determini infine il valore della velocità del centro di massa del sistema in fondo al piano inclinato.




**Esercizio 3**

Un gas monoatomico (2 moli) inizialmente nello stato A a temperatura $T_A$= 300 K e pressione $P_A$= 2 $10^5$ Pa, subisce un'espansione irreversibile fino a raggiungere uno stato B caratterizzato da un volume $V_B$= 0.4 m$^3$ e dalla temperatura $T_B$= 200 K. Nella trasformazione AB il gas assorbe una quantità di calore $Q_{AB}$ = 6500 J da un termostato a temperatura $T_A$. Successivamente il gas viene compresso isotermicamente e reversibilmente fino allo stato C, dal quale viene riportato allo stato iniziale A con una ulteriore compressione adiabatica reversibile. Determinare il lavoro compiuto nella trasformazione AB, il volume dello stato C ed il calore scambiato nella trasformazione BC. Calcolare infine la variazione di entropia associata alla trasformazione AB.

# Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 15/07/2010

## 1 Quesito

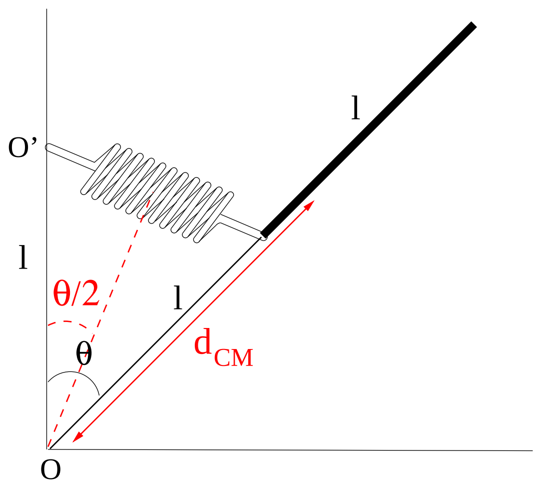



Figura 1: Quesito 1

La soluzione al quesito si ottiene studiando l'energia potenziale del sistema costituito dalle due sbarre e dalla molla. L'energia potenziale gravitazionale del sistema si può calcolare sommando i contributi individuali di ciascuna sbarra (la molla è assunta di massa trascurabile) oppure, equivalentemente, considerando il sistema delle due sbarre come un tutt'uno. In quest'ultimo caso occorre determinare la posizione del centro di massa, che per ragioni di simmetria sarà situata lungo la direzione delle sbarre e a una distanza $d_{CM}$ da O pari a:

$$d_{CM} = \frac{\frac{1}{2}lm_1 + \frac{3}{2}lm_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}l\frac{m_1 + 3m_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

L'energia potenziale gravitazionale associata è

$$U_{grav}(\theta) = (m_1 + m_2)gd_{CM}cos\theta \tag{2}$$

Il calcolo dell'energia potenziale riconducibile alla forza elastica richiede la determinazione dell'allungamento della molla nel passaggio dalla posizione di riposo (quella in cui $\theta$=$\theta_0$ =30°) a quella di equilibrio (quella in cui $\theta$=45°). Con rifermineto alla figura 1, l'allungamento $\Delta X$ è:

$$\Delta X = 2l\left(sen\frac{\theta}{2} - sen\frac{\theta_0}{2}\right) \tag{3}$$

L'energia potenziale ad essa associata sarà quindi

$$U_{elast}(\theta) = \frac{1}{2}k\left[2l\left(sen\frac{\theta}{2} - sen\frac{\theta_0}{2}\right)\right]^2 \tag{4}$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è la somma dei termini gravitazionale ed elastico.

$$U_{tot} = U_{elast} + U_{grav} \tag{5}$$

Lo studio degli zeri della funzione derivata prima dell'energia potenziale rispetto a $\theta$ fornisce la condizione per cui si realizza l'equilibrio del sistema.

$$\frac{dU_{tot}}{d\theta} = 2kl^2\left(sen\frac{\theta}{2} - sen\frac{\theta_0}{2}\right)cos\frac{\theta}{2} - (m_1+m_2)gd_{CM}sen\theta = 0 \tag{6}$$

Valutando l'espressione precedente in $\theta$=45° si determina il valore di k che garantisce l'equilibrio del sistema a tale angolo.

$$k = \frac{\frac{1}{2}(m_1+3m_2)gsen\theta}{lsen\theta - 2lsen\frac{\theta_0}{2}cos\frac{\theta}{2}} \tag{7}$$

Numericamente, k= 166,5 N/m.

La condizione di equilibrio del sistema si può inoltre ricavare imponendo che la risultante delle forze e dei momenti siano nulle. Ad esempio, la risultante dei momenti fatti rispetto ad O si ottiene considerando i due contributi (di segno opposto) dovuti rispettivamente alla forza peso delle due sbarre $(m_1+m_2)g$ applicata in $d_{CM}$ e alla forza elastica $k\Delta X$ applicata nel punto di congiunzione delle sbarre.

$$(m_1+m_2)gd_{CM}sen\theta = 2kl^2\left(sen\frac{\theta}{2} - sen\frac{\theta_0}{2}\right)cos\frac{\theta}{2} \tag{8}$$

Quest'equazione è identica all'espressione ricavata nell'equazione 6 e conduce quindi esattamente allo stesso risultato, come atteso.

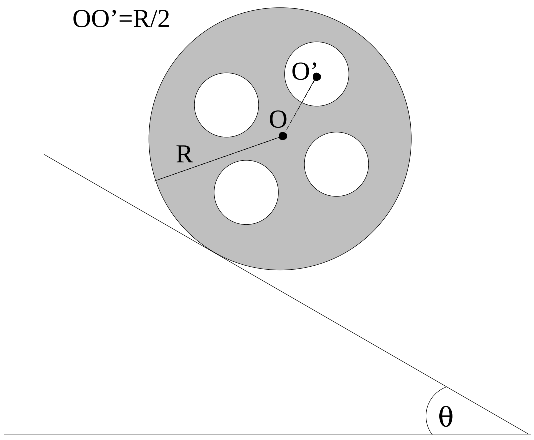



Figura 2: Quesito 2

# 2 Quesito

La determinazione del momento di inerzia del disco con i 4 fori segue dalle proprietà di additività e dall’applicazione del teorema di Huygens Steiner. Siano:

$$\begin{aligned} M' =& \sigma\pi R^2 \\ & \text{Massa di un ipotetico disco di raggio R} \\ m =& \sigma\pi r^2 \\ & \text{Massa sottratta per ciascun foro} \\ M =& \sigma(\pi R^2 - 4\pi r^2) \\ & \text{Massa del disco di raggio R dopo l'applicazione dei 4 fori} \end{aligned} \tag{9}$$

Il momento di inerzia $I_O$ del disco con i 4 fori si ottiene sottraendo al momento di inerzia di un ipotetico disco di raggio R i contributi associati alla masse rimosse dopo l’applicazione dei fori.

$$I_O = \frac{1}{2}M'R^2 - 4\left[\frac{1}{2}mr^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right] \tag{10}$$

in cui il secondo fattore nella parentesi quadra rappresenta il termine di Huygens Steiner (la distanza tra gli assi paralleli passanti rispettivamente per il centro del disco O ed il centro di ciascun foro è $\left(\frac{R}{2}\right)^2$. Tenendo conto del fatto che $r = R/4$ e sviluppando i calcoli si ottiene

$$I_O = \sigma\pi R^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4^4} - \frac{1}{4^2}\right) \tag{11}$$

Numericamente, $I_O$=6.7 $10^{-2}$ kg $m^2$.
Lo studio del moto del sistema in esame richiede l'impiego delle equazioni cardinali in combinazione con la condizione fornita dalla sussistenza del vincolo di puro rotolamento. Rispetto ad un sistema di riferimento con l'asse x positivo lungo il piano inclinato (nella direzione del moto) e scegliendo il centro di massa del sistema come polo rispetto a cui calcolare il momento delle forze si ha che:

$$\begin{aligned} Ma_{cm} &= Mgsen\theta - f_A \\ 0 &= Mgcos\theta + N \\ I_0\alpha &= -f_A R \\ a_{cm} &= -\alpha R \qquad \text{condizone di puro rotolamento} \end{aligned} \tag{12}$$

in cui N è la reazione normale al piano, $f_A$ la forza di attrito statico applicata nel punto di contatto del disco con il piano inclinato, $a_{cm}$ l'accelerazione del centro di massa lungo l'asse x e $\alpha$ il modulo dell'accelerazione angolare (presa positiva se concorde con l'asse z positivo assunto uscente dal piano del foglio). Si tratta di un sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite ($N$, $a_{cm}$, $\alpha$ ed $f_A$). Ad esempio, utilizzando la terza e la quarta equazione si può esprimere $a_{cm}$ in funzione di $f_A$ e, sostituiendo nella prima equazione, si determina $f_A$:

$$f_A = \frac{Mgsen\theta}{1 + \frac{MR^2}{I_0}} \tag{13}$$

Il vincolo di puro rotolamento è mantenuto se durante il moto vale che

$$|f_A| \leq \mu|N| \tag{14}$$

in cui $\mu$ è il cofficiente di attrito statico. Quest'ultima condizione implica che

$$\mu \geq \mu_{min} = \frac{tan\theta}{1 + \frac{MR^2}{I_0}} \tag{15}$$

Numericamente, $\mu_{min} = 0.214$.
Dalla risoluzione del sistema 12 si ottiene anche il valore di $a_{cm}$:

$$a_{cm} = \frac{Mgsen\theta}{M + \frac{I_0}{R^2}} \tag{16}$$

La velocità del centro di massa in fondo al piano inclinato si ricava da semplici considerazioni di cinematica poichè il centro d massa del sistema si muove di moto uniformemente accelerato. Quindi

$$v_{cm} = \sqrt{2la_{cm}} \tag{17}$$

Numericamente, $v_{cm}$=4.29 m/s.

# 3 Quesito

In figura è rappresentato il ciclo termodinamico descritto nel quesito.

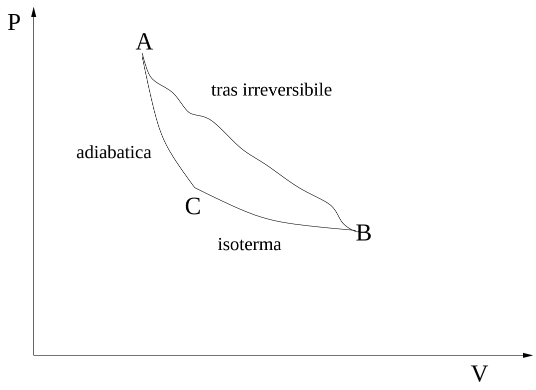



Figura 3: Quesito 3

Il calcolo del lavoro associato alla trasformazione AB segue direttamente dal primo principio della termodinamica $U_{AB}$ = $Q_{AB}$ - $L_{AB}$, ovvero $L_{AB}$ = $Q_{AB}$ - $nc_V$ ($T_B$ - $T_A$). Numericamente, $L_{AB}$=8.99 kJ.
Il volume del gas nello stato C si determina sfruttando le prorietà delle trasformazioni adiabatiche reversibili.

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

in cui $\gamma = c_P/c_V = 5/3$ (gas monoatomico). Risulta dunque

$$V_C = \left(\frac{T_A}{T_{B,C}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A$$

Numericamente, $V_C$ = 0.0457 $m^3$.
Il calore scambiato nella trasformazione CB si calcola osservando che per un'isoterma è $U_{BC}$ = 0. Ciò implica $Q_{BC}$ = $L_{BC}$.

$$Q_{BC} = L_{BC} = \int_B^C pdV = nRT_{B,C} \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_{B,C}\ ln\frac{V_C}{V_B} \qquad (18)$$

Numericamente, $Q_{BC}$=-7.21 kJ.
Infine il calcolo della variazione di entropia nella trasformazione AB (irreversibile) si può calcolare osservando che

$$S_{AB,irrev} = S_{AC,rev} + S_{CB,rev}$$

Poichè $S_{AC,rev}$=0 (AC è una trasformazione adiabatica reversibile) e CB è una trasformazione isoterma reversibile, si ottiene

$$S_{AB,irrev} = S_{CB,rev} = \int_C^B \frac{dQ_{CB}}{T_{B,C}} = nR \; ln \frac{V_B}{V_C}$$

Numericamente, $S_{AB,irrev}$=36 J/K.

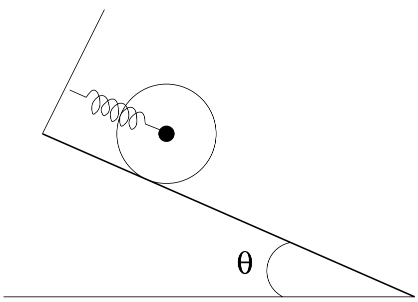
Università del Salento - Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 6/2/2012

**Esercizio 1**

Un disco circolare di raggio R=0.2 m, massa M=1 kg e spessore trascurabile, inizialmente fermo, viene messo in rotazione in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Al disco è applicato un momento costante, diretto lungo l'asse di rotazione, di modulo 0.1 Nm. Una massa puntiforme m=0.1 kg, è appoggiata sul disco ad una distanza r=3/4 R dal centro. Il coefficiente di attrito statico $\mu_s$ tra la superfice del disco e la massa m è 0.1.
1) Si calcoli il modulo dell'accelerazione angolare del sistema massa-disco.
2) Verificato che la massa m subito dopo l'istante iniziale resta solidale con il disco, si calcoli il modulo della velocità angolare per cui essa comincia a scivolare e 3) l'istante di tempo in cui ciò accade.

**Esercizio 2**

Un sistema meccanico costituito da un disco sottile non omogeneo di raggio R e massa m=3 kg, è vincolato a rotolare senza strisciare su un piano inclinato che forma un angolo $\theta$=30° con l'orizzontale. La densità del disco è inversamente proporzionale al suo raggio. Una molla di costante elastica k=200 N/m e lunghezza di riposo trascurabile è applicata nel centro del disco. Si determini il valore dell'allungamento della molla all'equilibrio. Successivamente, la molla viene rimossa e il disco rotola lungo il piano inclinato. Si calcoli il minimo valore del coefficiente di attrito per cui il moto del disco si mantiene di rotolamento puro.




**Esercizio 3**

2 moli di un gas perfetto biatomico eseguono un ciclo reversibile composto da una trasformazione isocora AB, un'espansione adiabatica BC, ed una trasformazione isoterma CA. Si rappresenti il ciclo descritto nel piano PV e si determini: 1) il lavoro fatto dal gas in ogni trasformazione; 2) il calore scambiato; 3) la variazione di entropia; 4) il rendimento del ciclo.
($V_A$=2m$^3$, $P_A$=10kPa, $P_B$=40kPa)

# Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 12/9/2011

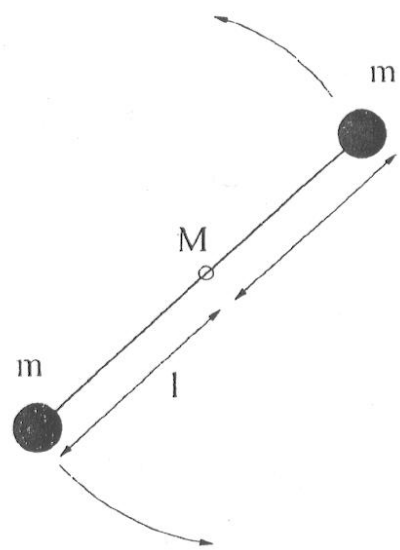
Università del Salento - CdL Ingegneria dell'Informazione

**Esercizio 1**

Due blocchetti di materiali distinti e massa uguale (m=2kg) scivolano lungo un piano scabro, inclinato di un angolo $\theta$=30°. All'istante iniziale, la distanza tra i due blocchetti è 1m ed il coefficiente di attrito (sia statico che dinamico) vale $\mu_1$=0.25 per il blocchetto situato alla quota superiore e $\mu_2$=0.5 per quello alla quota inferiore. Verificare che valgono le condizioni affinchè i due blocchetti si muovano lungo il piano inclinato. Determinare l'intervallo di tempo necessario affinchè il blocchetto inizialmente alla quota superiore raggiunga quello posto alla quota inferiore e, supponendo che i blocchetti urtino in modo totalmente anelastico, calcolare la velocità del sistema complessivo subito dopo l'urto.

**Esercizio 2**

Un sistema meccanico è costituito da un'asta rigida ed omogenea di massa M=20kg e lunghezza 2l=2m, disposta orizzontalmente e vincolata a ruotare con frequenza di 1.5Hz attorno ad un asse verticale liscio passante per il suo centro di massa. Due blocchi uguali, ciascuno di massa m=5kg, sono inizialmente posizionati alle estremità dell'asta e successivamente avvicinati all'asse di rotazione fino ad una distanza l'=0.8m. Si calcoli 1) il momento di inerzia del sistema asta-blocchi nella configurazione iniziale ed in quella finale 2) la velocità angolare nella configurazione finale 3) la variazione di energia meccanica.

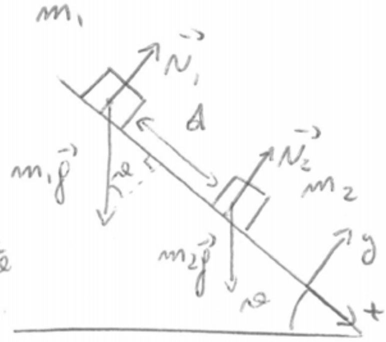



**Esercizio 3**

Una mole di gas perfetto biatomico esegue un ciclo termodinamico reversibile costituito da due isobare (AB e CD) e da due adiabatiche (BC e DA). Note le coordinate termodinamiche dello stato A ($P_A$ = 100 kPa, $V_A$ = 0.1 m$^3$, $V_A > V_B$), noto il valore del volume in B ($V_B = 0.5V_A$) e noto il valore della pressione in C ($P_C = 3P_A$), si calcoli il rendimento del ciclo e si verifichi che la variazione complessiva di entropia nel ciclo è nulla.

## Soluzione

### Es. 1




Per verificare che i due blocchetti si possono muovere, nonostante l'attrito, è necessario ~~ecf~~ verificare che la risultante delle forze agenti su entrambi i blocchi ha componente lungo la ~~d~~ direzione del possibile moto maggiore del valore massimo della forza di attrito statico.

~~Con riferimento~~ Le forze agenti sui blocchi sono, oltre all'attrito, la forza peso $m_i\vec{g}$, e la forza normale esercitata dal piano d'appoggio, $\vec{N}_i$ $(i=1,2)$.

Poiché $\vec{N}_i$ è ortogonale all'asse del moto (asse x), l'unica forza esterna con componente lungo x è la forza peso (oltre all'attrito). La componente x della forza peso è $m_i g \operatorname{sen}\vartheta$, mentre il valore massimo dell'attrito statico è $|\vec{F}_{Si\,MAX}| = \mu_{Si} N_i = \mu_{Si} m_i g \cos\vartheta$

Affinché il moto sia possibile deve essere: $m_i g \operatorname{sen}\vartheta > |\vec{F}_{Si\,MAX}| \Leftrightarrow \mu_S < \operatorname{tg}\vartheta = 0.577$

Per il corpo 1 abbiamo $\mu_{S1} = 0.25$, e per il corpo 2 $\mu_{S2} = 0.5$, entrambi minori di $\operatorname{tg} 30° = 0.577$.

Per entrambi i corpi, pertanto, l'attrito non è in grado di consentire l'equilibrio, e quindi entrambi i corpi si muovono lungo l'asse x.

Per determinare l'istante in cui i due blocchi hanno la stessa posizione è sufficiente determinate l'accelerazione con cui si muovono partendo dalle equazioni del moto

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = m_1 g \operatorname{sen}\vartheta - \mu_1 N_1 = m_1 g \operatorname{sen}\vartheta - \mu_1 m_1 g\cos\vartheta \Rightarrow a_{1x} = g(\operatorname{sen}\vartheta - \mu_1 \cos\vartheta) \\ m_1 a_{1y} = -m_1 g \cos\vartheta + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g\cos\vartheta \\ m_2 a_{2x} = m_2 g \operatorname{sen}\vartheta - \mu_2 N_2 = m_1 g \operatorname{sen}\vartheta - \mu_2 m_2 g \cos\vartheta \Rightarrow a_{2x} = g(\operatorname{sen}\vartheta - \mu_2\cos\vartheta) \\ m_2 a_{2y} = -m_2 g\cos\vartheta + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g\cos\vartheta \end{cases}$$

Entrambi i corpi scendono con accelerazione costante.
Scegliendo come origine la posizione di partenza del blocco 1 le leggi orarie del moto sono:

$$x_1 = \frac{a_{1x}}{2} t^2 = \frac{g}{2}(\operatorname{sen}\vartheta - \mu_1 g \cos\vartheta) t^2$$

$$x_2 = d + \frac{a_{2x}}{2} t^2 = d + \frac{g}{2}(\operatorname{sen}\vartheta - \mu_2 \cos\vartheta) t^2$$

Imponendo $x_1(t_1) = x_2(t_1)$ si trova $t_1 = \sqrt{\frac{2d}{(\mu_2 - \mu_1) g \cos\vartheta}} = 0.975$

Per determinare la velocità dopo l'urto è sufficiente notare che, non essendo presenti forze esterne impulsive, durante l'urto si conserva la quantità di moto, pertanto:

$$m_1 \vec{v}_1(t_1) + m_2 \vec{v}_2(t_1) = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

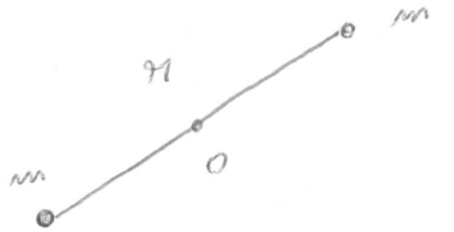
Inoltre $\vec{v}_1(t_1) = v_{1x}(t_1)\hat{x} = a_{1x} t_1 \hat{x}$ e $\vec{v}_{2x}(t_2) = v_{2x}(t_1)\hat{x} = a_{2x} t_1$;

Da cui si ottiene $\vec{v}_f = v_{fx}\hat{x}$ con

$$v_{fx} = \frac{m_1 v_{1x}(t_1) + m_2 v_{2x}(t_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 a_{1x} t_1 + m_2 a_{2x} t_1}{m_1 + m_2} = t_1 \left(\frac{m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x}}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= 1.67 \ m s^{-1}$$

Es. 2

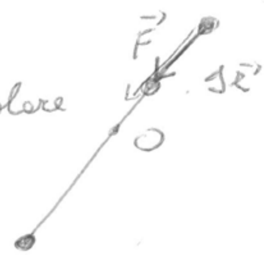



1) Il sistema è costituito da un'asta in rotazione intorno ad un'asse passante per il suo centro di massa, e ortogonale all'asta, e da due particelle puntiformi, inizialmente a distanza $l$ dall'asse, e poi a distanza $l'$.
Il momento di inerzia totale del sistema, rispetto all'asse di rotazione, è pertanto:

$$I_{TOT} = I_{O\,asta} + 2I_{O\,m} = \frac{M(2l)^2}{12} + 2m(l)^2 = \frac{Ml^2}{3} + 2ml^2 = 16.67\ kg\,m^2$$

$$I'_{TOT} = I_{O\,asta} + 2I'_{O\,m} = \frac{Ml^2}{3} + 2ml'^2 = 13.07\ kg\,m^2$$

2) Poiché lo spostamento dei blocchi avviene lungo l'asta, la forza responsabile di tale spostamento è diretta lungo l'asta, e pertanto ha momento meccanico nullo rispetto a O.
Pertanto durante lo spostamento il momento angolare totale del sistema non varia, perciò:




$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_O\,\omega_{i2} = I_O'\,\omega_{f2}$$

Dalla relazione tra velocità angolare e frequenza (per un moto circolare uniforme) si ha $\omega_{i2} = 2\pi\nu$ pertanto

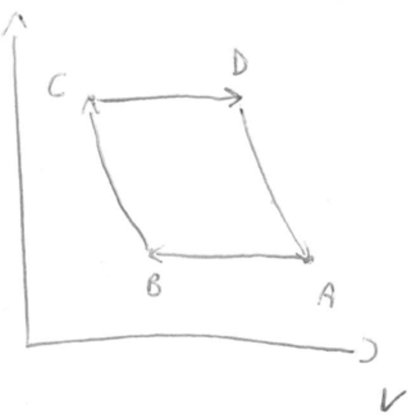
$$\omega_{f2} = \frac{I_O\,\omega_{i2}}{I_O'} = 12.02\ rad\ s^{-1}$$

3) L'energia meccanica del sistema è pari all'energia cinetica totale, pertanto la sua variazione è:

$$\Delta E = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2} I_O'\,\omega_f^2 - \frac{1}{2} I_O\,\omega_i^2 = 204.2\ J$$

Es. 3

Con le indicazioni fornite ($V_B < V_A$ e $P_C > P_A$) il ciclo è come rappresentato in Figura.




Per risolvere l'esercizio è utile calcolare le variabili di stato in A, B, C, e D.

In A, noti $P_A$ e $V_A$ si ha $T_A = \dfrac{P_A V_A}{nR} = 1202.8\ K$

In B $P_B = P_A$ (perché AB è isobara) e $V_B = 0.5\, V_A$, da cui si ottiene immediatamente $T_B = \dfrac{T_A}{2} = 601.4\ K$

Essendo BC adiabatica abbiamo $P_B V_B^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma} \iff V_C = V_B \left(\dfrac{P_B}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} =$

$= V_B \left(\dfrac{P_A}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_B \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_B \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{7}} = 2.28\, 10^{-2}\ m^3$ essendo $\gamma = \dfrac{7}{5}$

Da cui si ottiene $T_C = \dfrac{P_C V_C}{nR} = 823.2\ K$

Poiché DA è adiabatica si ha

$P_D V_D^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma} \Rightarrow V_D = V_A \left(\dfrac{P_A}{P_D}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 4.56\, 10^{-2}\ m^3 = 2 V_C$

Pertanto essendo $P_D = P_C$ (CD isobara) e $V_D = 2V_C$ si ha $T_D = 2T_C = 1646.$ K

1) Il calcolo del rendimento $\eta$ è più semplice se si esprime $\eta$ come $\eta = \dfrac{Q_{TOT}}{Q_{ASS}}$, perché solo in due trasformazioni si ha $Q \neq 0$

Al contrario partendo da $\eta = \dfrac{L}{Q_{ASS}}$ è necessario calcolare il lavoro fatto in 4 trasformazioni, oltre al calore assorbito.

Essendo inoltre $Q = n C_p \Delta T$ nelle trasformazioni isobare è immediato concludere che $Q_{CD} > 0$ (calore assorbito), mentre $Q_{AB} < 0$ (calore ceduto)

Per cui

$$\eta = \frac{Q_{CD} + Q_{AB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{n C_p (T_B - T_A)}{n C_p (T_D - T_C)} = 1 - \frac{T_B}{T_C} = 26.9\%$$

2) Per quanto riguarda la variazione di entropia si ha $\Delta S_{BC} = \Delta S_{DA} = 0$ perché BC e DA sono adiabatiche reversibili

$$\Delta S_{AB} = \int_{A \, p\,cost}^{B} \frac{dQ}{T} = \int_A^B nC_p \frac{dT}{T} = nC_p \log \frac{T_B}{T_A} = nC_p \log \frac{1}{2}$$

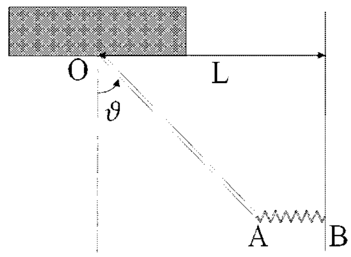
$$\Delta S_{CD} = nC_p \log \frac{T_D}{T_C} = nC_p \log 2 = -nC_p \log \frac{1}{2} = -\Delta S_{AB}$$

Da cui $\Delta S_{TOT} = 0 \; J/k$

# Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 26/7/2011

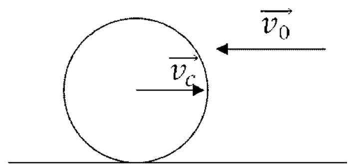
Università del Salento - Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

**Esercizio 1**



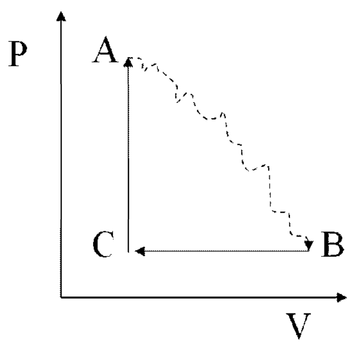

Il sistema meccanico in figura  costituito da una sbarra omogenea, di massa M e lunghezza L,vincolata a ruotare senza attrito intorno ad un asse orizzontale passante per l'estremo superiore O. All'estremo inferiore dell'asta A  attaccata una molla con lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k che, all'altra estremità B è vincolata a scorrere senza attrito lungo una guida verticale. Si calcoli il valore della costante elastica k per cui il sistema  in equilibrio quando l'angolo di inclinazione della sbarretta con la verticale è pari a 45°. Supponendo che la molla venga rimossa si determini la velocità angolare dell'asta quando raggiunge la posizione verticale.
M=5 kg, L= 1 m.

**Esercizio 2**



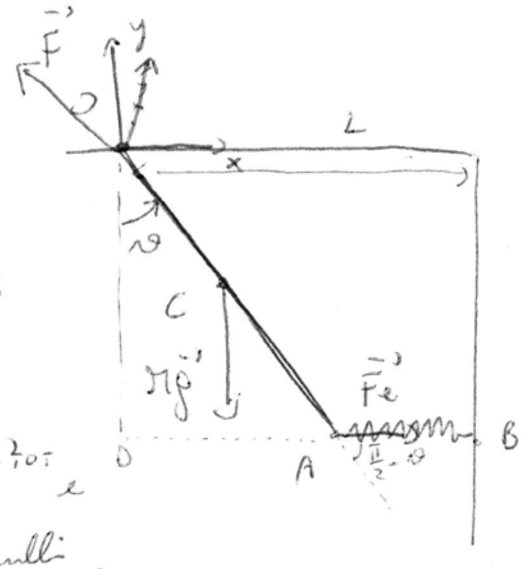

Un disco omogeneo uniforme, di massa M e raggio R, appoggiato ad un piano orizzontale ed in moto di puro rotolamento, subisce un urto istantaneo con un proiettile puntiforme di massa m. Supponendo che la velocità iniziale del proiettile $\vec{v_0}$ sia orizzontale e discorde in verso alla velocità del centro di massa del disco $\vec{v_c}$, che il proiettile disti 3/2R dal piano d'appoggio del disco, e che l'urto sia completamente anelastico:
Si determini il valore di $v_0$ che consente l'arresto del sistema nell'urto;
Si determini l'energia dissipata nell'urto.
M= 1 kg, R= 50 cm, $v_c$=10 ms$^{-1}$, m= 20 g

**Esercizio 3**




2 moli di un gas perfetto biatomico, inizialmente in equilibrio in uno stato A, subiscono un'espansione adiabatica irreversibile AB in cui il volume del gas raddoppia. Successivamente il gas viene riportato nello stato iniziale reversibilmente tramite una trasformazione isobara BC e una trasformazione isocora CA. Si determinino:
1) Il lavoro fatto dal gas e il calore assorbito nelle tre trasformazioni;
2) Il rendimento del ciclo;
3) La variazione di entropia nella trasformazione AB.
$T_A$=300 K, $P_A$=$10^5$Pa, $T_B$= 100 K

Esercizio 1




1) Per determinare il valore di k che consente l'equilibrio del sistema per $\vartheta = 45°$ si può procedere in due modi:

a) Nelle posizioni di equilibrio la risultante delle forze esterne $\vec{F}^{TOT}$ e il momento meccanico totale sono nulli.

Le forze agenti sono il peso della sbarretta $M\vec{g}$ (applicato nel centro di massa C), la forza elastica $\vec{F_e}$ (applicata in A) e la forza vincolare $\vec{F}$ (applicata in O). Rispetto al riferimento in figura le forze si possono esprimere come

$M\vec{g} = -Mg\hat{y}$ , $\vec{F_e} = KAB\,\hat{x}$ , $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y}$

Inoltre $AB = DB - DA = L - L\,\text{sen}\,\vartheta$

Calcolando i momenti rispetto a O si ha:

$$\begin{cases} M\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{TOT} = M\vec{g} + \vec{F} + \vec{F_e} = \vec{0} \\ I_O\vec{\alpha} = \vec{\tau}_O^{\,TOT} = \vec{OC}\times M\vec{g} + \vec{OA}\times\vec{F_e} = \vec{0} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si possono ricavare le componenti di $\vec{F}$ (non richieste) trovando
$$\begin{cases} F_y = Mg \\ F_x = -KAB \end{cases}$$

Dalla seconda invece si ha:

$$\begin{cases} \vec{OC}\times M\vec{g} + \vec{OA}\times\vec{AB} = -\frac{L}{2}Mg\,\text{sen}\,\vartheta + L\,K\,AB\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right) = 0 \iff \\ \iff -\frac{L}{2}Mg\,\text{sen}\,\vartheta + L\,K\,L(1-\text{sen}\,\vartheta)\cos\vartheta = 0 \iff \end{cases}$$

$$\iff -\frac{Mg}{2}\text{sen}\,\vartheta + kL\cos\vartheta(1-\text{sen}\,\vartheta) = 0 \iff k = \frac{Mg\,\text{sen}\,\vartheta}{2L\cos\vartheta(1-\text{sen}\,\vartheta)}$$

Chiedendo che l'equilibrio si abbia per $\vartheta = 45°$ si trova ($\text{sen}\,45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$k = \frac{Mg}{2L\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{Mg}{L(2-\sqrt{2})} = \frac{5\cdot 9.81}{1(2-\sqrt{2})} = 83.7\ \text{N}\,\text{m}^{-1}$$

b) Equivalentemente, dato che le forze agenti sono conservative ($m\vec{g}$ e $\vec{F}_e$) o a lavoro nullo ($\vec{F}$ è a lavoro nullo perché il vincolo è liscio), la posizione di equilibrio si ottiene come posizione di minima energia potenziale totale.

Ricordando che $E_{pg} = mg\,y_c$ (con $y$ calcolato lungo un'asse verticale verso l'alto)

e che $E_{pe} = \frac{1}{2} k \Delta L^2$

nel riferimento in figura si ha

$$E_p^{TOT} = mg\,y_c + \frac{1}{2} k \Delta L^2 = -mg\frac{L}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2} k L^2 (1-\operatorname{sen}\vartheta)^2$$

Imponendo la condizione

$$\frac{dE_p^{TOT}}{d\vartheta} = 0 \quad \text{si ha} \quad \frac{d}{d\vartheta}\left(-mg\frac{L}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2} k L^2 (1-\operatorname{sen}\vartheta)^2\right) =$$

$$= mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\vartheta - \frac{1}{2} k L^2\, 2(1-\operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta = 0$$

da cui si ottiene $k = \dfrac{mg\operatorname{sen}\vartheta}{2L\cos\vartheta(1-\operatorname{sen}\vartheta)}$, esattamente come al punto a.

2) Per determinare la velocità angolare dell'asta quando passa dalla verticale è sufficiente notare che il moto dell'asta, dopo che la molla è stata rimossa, avviene sotto l'azione del peso $m\vec{g}$, conservativo, e della forza vincolare $\vec{F}$, a lavoro nullo. Pertanto si conserva l'energia meccanica.

$$E_i = E_f \iff \frac{1}{2} I_o \underbrace{\omega_i^2}_{=0} + mg\,y_{ci} = \frac{1}{2} I_o \omega_f^2 + mg\,y_{cf}$$

(l'asta parte da ferma)

$y_{ci} = -\frac{L}{2}\cos\vartheta \qquad y_{cf} = -\frac{L}{2}$ pertanto

$$\frac{1}{2} I_o \omega_f^2 = +mg\frac{L}{2}(1-\cos\vartheta) \iff \omega_f^2 = \frac{2}{I_o} mg\frac{L}{2}(1-\cos\vartheta) = \frac{mg}{I_o} L (1-\cos\vartheta)$$

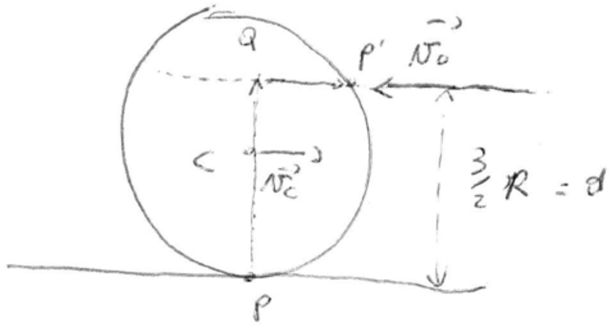
$$= \frac{mgL}{\frac{mL^2}{3}}(1-\cos\vartheta) = \frac{3g}{L}(1-\cos\vartheta) = \frac{3\cdot 9.81}{1}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8.62\,(\text{rad s}^{-1})^2 \Rightarrow \omega_f = 2.94\ \text{rad s}^{-1}$$

Poiché la rotazione è oraria si avrà $\vec{\omega}_f = -\omega_f \hat{z}$

Esercizio 2

1) L'urto è completamente anelastico, quindi non si conserva l'energia cinetica.

Si conserva invece il momento angolare rispetto a $\vec{P}$ pertanto




$$\vec{L}_{P_i} = \vec{L}_{P_f} \iff I_P \vec{\omega}_i + \vec{PP'} \times m\vec{v}_0 = \vec{L}_{P_f} = \vec{0}$$ (perché l'urto provoca l'arresto del sistema)

Inoltre si ha, dato il puro rotolamento col il verso di moto iniziale del disco, $\vec{\omega}_i = -\frac{v_{ci}}{R}\hat{z}$.

Infine $I_P = I_C + MR^2$ (T. di Steiner) $= \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

$$+I_P \omega_{iz}\hat{z} + d\,m v_0 \hat{z} = \vec{0} \iff v_0 = -\frac{I_P \omega_{iz}}{d\,m} = -\frac{\frac{3}{2}MR^2\left(-\frac{v_c}{R}\right)}{\frac{3}{2}R\,m} =$$

$$= \frac{M}{m} v_c = 500\,m\,s^{-1}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare anche osservando che le forze vincolari presenti, $\vec{N}$ e $\vec{F_s}$, sono entrambe limitate superiormente, e quindi non impulsive. Pertanto nell'urto si conserva anche la quantità di moto e si ha:

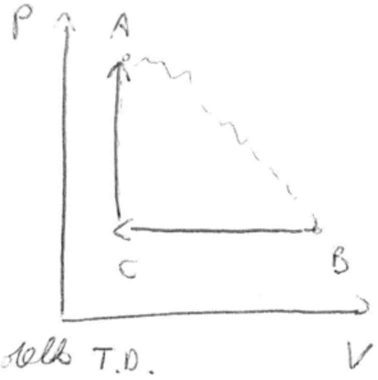
$$\vec{p}_i^{TOT} = \vec{p}_f^{TOT} \iff M\vec{v}_c + m\vec{v}_0 = \vec{0} \iff \vec{v}_0 = -\frac{M}{m}\vec{v}_c$$

2) L'energia dissipata nell'urto è in generale pari alla differenza tra l'energia cinetica totale prima dell'urto e quella dopo l'urto.
Nel caso specifico l'energia cinetica finale è zero, perché l'urto provoca l'arresto del sistema pertanto:

$$E_{diss} = E_{ci}^{TOT} - E_{cf}^{TOT} = E_{ci}^{TOT} = \frac{1}{2}I_P\omega_i^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\frac{v_c^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= \frac{3}{4}Mv_c^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = 2575\,J$$

Esercizio 3




1) Trasformazione AB.

Il calore assorbito $Q_{AB}$ è nullo, per definizione di adiabatica.

Il lavoro fatto si ottiene dal I. Principio della T.D.

$$\Delta U_{AB} + L_{AB} = Q_{AB} = 0 \iff L_{AB} = -\Delta U_{AB} = -n C_V (T_B - T_A)$$

con $C_V = \frac{5}{2} R$

Trasformazione BC

La trasformazione è isobara pertanto

$$Q_{BC} = n C_p (T_C - T_B) \quad e \quad L_{BC} = P_B (V_C - V_B)$$

con $C_p = \frac{7}{2} R$

Trasformazione CA

$L_{CA} = 0\,J$ perché CA è isocora

$$Q_{CA} = n C_V (T_A - T_C)$$

Per determinare i valori numerici determiniamo le variabili di stato in A, B, C. In A sono noti T e P, pertanto

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 4.99 \; 10^{-2} \; m^3$$

In B è noto il volume (perché $V_B = 2 V_A$) e la temperatura quindi

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 16667 \; Pa$$

In C sono noti il volume ($V_C = V_A$) e la pressione ($P_C = P_B$) pertanto

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 50 \; K$$

Da cui si ottiene:

$L_{AB} = 8314\,J$ $\qquad Q_{AB} = 0\,J$

$L_{BC} = -831.4\,J$ $\quad$ e $\quad Q_{BC} = -2910\,J$

$L_{CA} = 0\,J$ $\qquad Q_{CA} = 10392\,J$

2) Il rendimento può essere calcolato indifferentemente come rapporto tra lavoro fatto e calore assorbito, o tra calore scambiato e calore assorbito.

$$\eta = \frac{L^{TOT}}{Q_{ASS}} = \frac{Q^{TOT}}{Q_{ASS}} \quad \text{quindi}$$

$$\eta = \frac{L_{AB} + L_{BC}}{Q_{CA}} \quad \text{o} \quad \eta = \frac{Q_{BC} + Q_{CA}}{Q_{CA}}$$

in entrambi i casi si ottiene $\eta = 0.72 = 72\ \%$

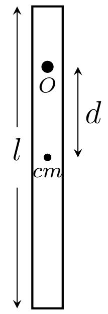
3) $\Delta S_{AB} = \int_{A\ \text{rev}}^{B} \frac{dQ}{T}$

È importante notare che $\Delta S_{AB}$ è diversa da $0\ \frac{J}{K}$, perché AB è adiabatica, ma irreversibile. L'integrale che definisce $\Delta S_{AB}$ va calcolato lungo una qualsiasi trasformazione reversibile che inizi in A e finisca in B. Scegliendo di usare la combinazione di BC e CA, effettuate al contrario abbiamo:

$$\Delta S_{AB} = \int_{A\ V_{cost}}^{C} \frac{dQ}{T} + \int_{C\ P_{cost}}^{B} \frac{dQ}{T} = n C_v \log \frac{T_C}{T_A} + n C_p \log \frac{T_B}{T_C} =$$

$$= -74.48 + 40.34 = -34.14\ J K^{-1}$$

**Esercizio 1** - Una sbarretta omogenea di massa $m$ , lunghezza $l$ e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad $l$ può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato a distanza $d$ dal suo centro di massa $cm$. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla sua posizione di equilibrio stabile in funzione di $m$, $l$, $d$ e dell'accelerazione di gravità.




**Soluzione** - Il momento d'inerzia rispetto ad $O$ è dato da (teorema di Huygens-Steiner):

$$I_O = I_{cm} + m \cdot d^2 = \left(\frac{1}{12}l^2 + d^2\right) \cdot m$$

Introduciamo l'asse $z$ uscente dal foglio ed indichiamo con $\theta$ l'angolo formato tra la sbarretta e la direzione verticale ($\theta = 0$ nella posizione di equilibrio stabile, $\theta > 0$ per una rotazione antioraria). Indicando con $\alpha$ e $\tau$ le componenti lungo $z$ dell'accelerazione angolare e della somma dei momenti delle forze agenti sulla sbarretta calcolati rispetto ad $O$ e considerando che il momento rispetto ad $O$ della reazione vincolare dell'asse orizzontale è nullo, possiamo scrivere la seconda equazione cardinale:

$$I_O\alpha = \tau = -d \cdot m \cdot g \cdot sin(\theta) \simeq -d \cdot m \cdot g \cdot \theta$$

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni l'equazione si scrive dunque: $I_O\ddot{\theta} = -d \cdot m \cdot g \cdot \theta$

Ed il periodo risulta essere dato da (analogia col pendolo semplice) : $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_O}{d \cdot m \cdot g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(\frac{1}{12}l^2 + d^2)}{d \cdot g}}$

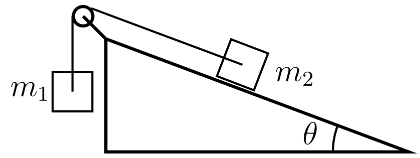
---

**Esercizio 2** - Il sistema rappresentato in figura è in equilibrio e sono trascurabili gli attriti e le masse della carrucola e della fune; inoltre la fune è inestensibile.

a) Calcolare l'espressione di $\theta$ in funzione di $m_1$, $m_2$ e dell'accelerazione di gravità.

b) Calcolare il valore numerico di $\theta$ nel caso $m_1 = 0.5 \cdot m_2$.

c) Cosa succede al sistema se si imprime ad $m_1$ una velocità iniziale $v_0$ lungo la verticale ?




**Soluzione** - Introducendo un asse $x$ parallelo al piano inclinato e diretto verso il basso ed indicando con $T$ il modulo della tensione esercitata dalla fune, la componente $x$ della risultante delle forze agenti su $m_2$ si scrive $-T + m_2 \cdot g \cdot sin(\theta)$, mentre lungo l'asse $y$ la forza esercitata dal piano e la componente della forza peso si equilibrano. Per il corpo di massa $m_1$ conviene invece utilizzare un asse verticale diretto ad esempio verso l'alto, lungo il quale la risultante delle forze è data da $T - m_1 \cdot g$. Notiamo che i moduli della tensione esercitata ai due capi dalla fune sono uguali perchè la fune è inenstensibile e di massa trascurabile.
La condizione di equilibrio di entrambi i corpi è dunque data dal sistema di equazioni :

$$-T + m_2 \cdot g \cdot sin(\theta) = 0$$
$$T - m_1 \cdot g = 0$$

Ricavando $T$ dalla seconda e sostituendolo nella prima ricaviamo l'espressione di $sin(\theta)$ : $sin(\theta) = \frac{m_1}{m_2}$
Notiamo che tale espressione non dipende da $g$ e che si può avere l'equilibrio solo se $m_1 \leq m_2$.

Questo è un caso di equilibrio indifferente, cioè la risultante delle forze è nulla per qualunque posizione dei due corpi, purchè la fune rimanga tesa. Per questa ragione, se imprimiamo ad $m_1$ una velocità iniziale, esso continuerà a muoversi con la stessa velocità, e conseguentemente anche $m_2$ si muoverà con velocità costante.

---

**Esercizio 3** - Un gas perfetto esegue un ciclo reversibile a partire da un volume ed una temperatura iniziali $V_1$ e $T_A$ . Il ciclo è costituito da:

1) una espansione isoterma fino ad un volume $V_2$;
2) una trasformazione isocora fino ad una temperatura $T_B$ minore di $T_A$;
3) una compressione isoterma fino a raggiungere il volume iniziale $V_1$;
4) una trasformazione isocora che lo riporta nello stato iniziale.

Rappresentare il ciclo nel piano $p - V$, calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle quantità date in precedenza e verificare che tale rendimento è minore di quello di un ciclo di Carnot che operi fra le stesse temperature $T_A$ e $T_B$.

Come si può realizzare un tale ciclo, avendo a diposizione dei termostati?

**Soluzione** - Il calore assorbito ed il lavoro eseguito dal sistema nelle quattro trasformazioni sono dati da:

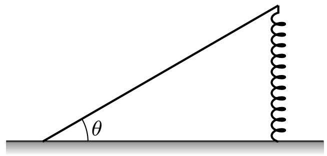
$Q_1 = n \cdot R \cdot T_A ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ $W_1 = Q_1$ ($Q_1 > 0$ : il sitema assorbe calore ed esegue un lavoro sull'esterno)
$Q_2 = n \cdot c_v \cdot (T_B - T_A)$ $W_2 = 0$ ( $Q_2 < 0$ : il lavoro compiuto è nullo ed il sistema deve cedere calore perchè la temperatura diminuisca)
$Q_3 = n \cdot R \cdot T_B ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ $W_3 = Q_3$ ($Q_3 < 0$ : il sitema cede calore e subisce un lavoro dall'esterno)
$Q_4 = n \cdot c_v \cdot (T_A - T_B)$ $W_4 = 0$ ($Q_4 > 0$ : il sistema deve ricevere calore dall'esterno affinchè pressione e temperatura aumentino a volume costante)

Il rendimento del ciclo è il rapporto tra il lavoro netto compiuto dal sistema ed il calore assorbito dall'esterno:

$$\eta = \frac{W_1 + W_3}{Q_1 + Q_4} = \frac{nR(T_A - T_B)ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{nRT_A ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nc_v(T_A - T_B)} = \frac{1}{\frac{T_A}{T_A - T_B} + \frac{c_v}{Rln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}}$$

Se il secondo termine a denominatore fosse nullo, il rendimento sarebbe uguale a quello del ciclo di Carnot; poichè è invece positivo, il rendimento è minore.
Il ciclo si realizza mettendo a contatto il sistema con termostati alle temperature $T_A$ e $T_B$ per le trasformazioni isoterme e con termostati la cui temperatura varia lentamente tra $T_A$ e $T_B$ ( e viceversa) per le isocore.

**Esercizio 1** - Nel sistema in figura la molla (costante elastica $k$, lunghezza di riposo $l_0$) può muoversi verticalmente. Al suo estremo libero è vincolato l'estremo di una sbarretta (massa $m$, lunghezza $d$, con $d > l_0$); l'altro estremo della sbarretta può scivolare senza attrito su un piano orizzontale. Il sistema ha due posizioni di equilibrio. Calcolare l'espressione di $\theta$ per tali posizioni in funzione delle quantità sopra indicate e dell'accelerazione di gravità e specificare il tipo di equilibrio.




**Soluzione** - Introduciamo un asse $z$ verticale diretto verso l'alto, con l'origine alla quota del piano di sostegno e scegliamo tale quota come zero dell'energia potenziale della forza peso. Indicando con $z$ e $z_{cm}$ le coordinate $z$ dell'estremo della molla e del centro di massa della sbarretta, ed esprimendo poi $z$ e $z_{cm}$ in funzione dell'angolo $\theta$, l'energia potenziale del sistema si scrive:

$$U(\theta) = mgz_{cm} + \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 = \frac{1}{2}mgd\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(d\sin\theta - l_0\right)^2$$

Indicando con $U'$ la derivata rispetto a $\theta$, la condizione di equilibrio è data da:

$$U'(\theta) = \frac{1}{2}mgd\cos\theta + k\left(d\sin\theta - l_0\right)d\cos\theta = d\cos\theta\left(\frac{1}{2}mg + kd\sin\theta - kl_0\right) = 0$$

L'uguagliaza si ha per i due valori di $\theta$ dati da: $\theta = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \sin\theta = \frac{-\frac{1}{2}mg + kl_0}{kd} = \frac{l_0}{d} - \frac{1}{2}\frac{mg}{kd}$
$\theta = \frac{\pi}{2}$ è una posizione di equilibrio instabile perchè l'energia potenziale ha un massimo; infatti il termine in parentesi nell'espressione di $U'$ è positivo per $\theta = \frac{\pi}{2}$ $(l_0 < d)$ e mantiene lo stesso segno per piccoli spostamenti da tale valore ; quindi $U'$ ha lo stesso segno di $\cos\theta$.
Consideriamo ora l'espressione che ci da il secondo valore di $\theta$ : se $m = 0$, la posizione di equilibrio corrisponde alla posizione di riposo della molla, come ci aspettiamo; all'aumentare di $m$ l'angolo diminuirà fino ad arrivare a zero quando la somma dei due addendi si annulla. Abbiamo dunque, al variare di $m$, un angolo di equilibrio compreso tra $0$ e $\arcsin\left(\frac{l_0}{d}\right)$. Il segno di $U'$ mostra poi che si tratta di equilibrio stabile. Analoghe considerazioni si possono fare per variazioni delle altre quantità.
Il tipo di equilibrio si può anche studiare analizzando il segno della derivata seconda:

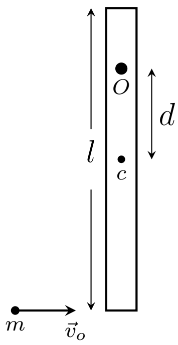
$$U''(\theta) = -d\sin\theta\left(\frac{1}{2}mg + kd\sin\theta - kl_0\right) + kd^2\cos^2\theta$$

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ il secondo addendo è nullo ed il primo negativo $(l_0 < d)$; per $\sin\theta = \frac{l_0}{d} - \frac{1}{2}\frac{mg}{kd}$ il primo addendo è nullo ed il secondo, ovviamente, positivo.

A parte la matematica, il tipo di equilibrio si può ricavare considerando l'andamento delle forze e dei momenti per piccoli spostamenti dalle due posizioni.

---

**Esercizio 2** - Una sbarretta omogenea di massa $M$ , lunghezza $l$ e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad $l$ può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato a distanza $d$ dal suo centro di massa $c$ ed è inizialmente in quiete. Un proiettile di massa $m$ si conficca nell'estremo inferiore della sbarretta e rimane solidale con essa. Prima dell'urto il proiettile ha velocità orizzontale $\vec{v}_o$; ipotizzando che l'urto avvenga in un intervallo di tempo molto breve in modo che si possa trascurare il moto della sbarretta:
a) Scrivere l'espressione della velocità angolare del sistema in funzione dell'angolo formato dalla sbarretta con la verticale e delle quantità date in precedenza.
b) Calcolare il valore minimo del modulo della velocità iniziale del proiettile, $v_o$, affinchè la sbarretta possa compiere un giro completo.
c) Come vanno modificate le espressioni ottenute se il proiettile si conficca sempre nell'estremo della sbarretta ma la sua velocità iniziale forma un angolo $\varphi$ con l'asse orizzontale ?




**Soluzione** - Fissiamo in $O$ l'origine del sistema di riferimento e il livello zero per l'energia potenziale della forza peso. Indichiamo con $I$ il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione e con $r_{cm}$ la distanza del suo centro di massa da $O$:
$I = \frac{1}{12}Ml^2 + Md^2 + m\left(d + \frac{l}{2}\right)^2 \quad ; \quad r_{cm} = \frac{Md + m(d + \frac{l}{2})}{m+M} = d + \frac{m}{m+M}\frac{l}{2}$
L'unica quantità che si conserva durante l'urto è il momento angolare respetto ad $O$. Infatti il momento della reazione vincolare è nullo rispetto a tale punto, come pure quello della forza peso agente sulla sbarretta e sul proiettile, se la sbarretta resta in posizione verticale; i momenti delle forze interne tra sbarretta e proiettile si annullano reciprocamente. La quantità di moto invece non si conserva: la sua variazione è prodotta dalla reazione vincolare. Il momento angolare iniziale è quello del solo proiettile, perpendicolare ed uscente dal piano della figura. Introducendo un asse $z$ che ha tale direzione e verso ed indicando con $\omega_o$ il modulo della velocità angolare subito dopo l'urto, l'uguaglianza tra le componenti $z$ dei momenti angolari iniziale e finale si scrive:
$mv_o\left(d + \frac{l}{2}\right) = I\omega_o \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{mv_o}{I}\left(d + \frac{l}{2}\right)$
Dopo l'urto, le forze esterne agenti sul sistema sono la forza peso, conservativa, e la reazione vincolare, che non compie lavoro. Di conseguenza durante il moto si conserva l'energia meccanica; indicando con $\theta$ l'angolo formato tra la sbarretta e l'asse verticale ($\theta = 0$ nella posizione iniziale) e con $\omega$ il modulo della velocità angolare nella posizione $\theta$, la conservazione dell'energia si scrive:
$\frac{1}{2}I\omega^2{}_o - r_{cm}(m+M)g = \frac{1}{2}I\omega^2 - r_{cm}\cos\theta(m+M)g \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega^2{}_o - \frac{2}{I}r_{cm}(m+M)(1-\cos\theta)g$
richiedendo che il secondo membro sia positivo si può ricavare l'angolo massimo che il sistema può raggiungere, Il valore minimo richiesto al punto b) si ricava imponendo che la sbarretta arrivi nella posizione verticale $\theta = \pi$ con velocità angolare nulla; quindi:
$\omega^2{}_{omin} = \frac{4}{I}r_{cm}(m+M)g \quad \Rightarrow \quad v_{omin} = \frac{1}{m(d+\frac{l}{2})}I\omega_{omin} = \frac{1}{m(d+\frac{l}{2})}I\sqrt{\frac{4}{I}r_{cm}(m+M)g} = \frac{2}{m(d+\frac{l}{2})}\sqrt{Ir_{cm}(m+M)g}$
Se la velocità iniziale forma un angolo $\varphi$ con l'asse orizzontale nelle espressioni precedenti $v_o$ va moltiplicato per $\cos\varphi$.

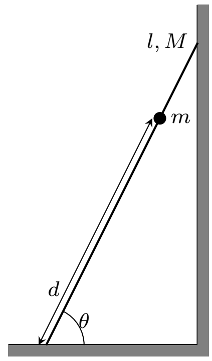
---

**Esercizio 3** - Un contenitore a pareti adiabatiche è chiuso da un pistone, anch'esso adiabatico e disposto orizzontalmente, di massa $M$ e sezione $S$; esso contiene $n$ moli di gas perfetto alla temperatura $T_1$. Il sistema è in equilibrio; calcolare il volume del gas in funzione delle quantità date, dell'accelerazione di gravità e della costante $R$ dei gas.
Successimante viene appoggiato al pistone un corpo di massa $m$ e il pistone si muove lentamente verso un nuovo stato di equilibrio; calcolare il volume del gas nello stato finale e verificare che è minore di quello iniziale; calcolare la temperatura finale e verificare che è maggiore di quella iniziale.

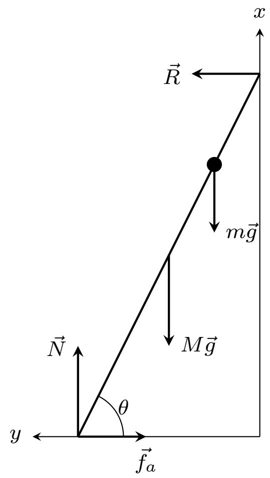
**Soluzione** - La forza esercitata dal gas sul pistone è normale alla sua superficie, diretta verso l'esterno del contenitore ed ha modulo $pS$, dove $p$ è la pressione del gas. Si ha l'equilibrio quando la risultante di tale forza e della forza peso è nulla. Poichè la trasformazione tra i due stati di equilibrio avviene lentamente,

è reversibile e possiamo applicare l'equazione caratteristica della trasformazione adiabatica. Assegnando i pedici $1$ e $2$ agli stati iniziale e finale possiamo quindi scrivere:
Equilibrio del pistone nello stato iniziale : $p_1 S = Mg$
Equazione di stato nello stato iniziale: $p_1 V_1 = nRT_1$
Equilibrio del pistone nello stato finale : $p_2 S = (M+m)g$
Equazione di stato nello stato finale: $p_2 V_2 = nRT_2$
Equazione caratt. della trasf. adiabatica: $p_2 {V_2}^{\gamma} = p_1 {V_1}^{\gamma}$
Dalla prima e dalla seconda equazione: $V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = \frac{nRT_1 S}{Mg}$; dalla quinta, ed utilizzando la prima e la terza: $V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_1 \left(\frac{M}{M+m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$
Dalle equazioni di stato ed utilizzando l' espressione di $V_2$ e di $V_1$: $T_2 = T_1 \left(\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}\right) = T_1 \left(\frac{M+m}{M}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$
Poichè $\frac{1}{\gamma}$ e $1 - \frac{1}{\gamma}$ sono positivi, i fattori che moltiplicano $V_1$ e $T_1$ nelle ultime due espressioni sono rispettivamente minore e maggiore di $1$.
La trasformazione lenta si può realizzare, ad esempio, mediante un cavo che lascia scendere lentamente il pistone o mediante l'attrito tra il pistone e le pareti del contenitore; in quest'ultimo caso il calore prodotto verrebbe disperso verso l'esterno perchè il contatto col gas è adiabatico. Se invece il pistone viene lasciato libero di scendere senza attrito il pistone oscillerebbe attorno ad una qualche posizione ma non potremmo applicare le equazioni precedenti perchè il gas non sarebbe in equilibrio termodinamico in ogni istante.

**Esercizio 1** - Una scale di massa di massa $M$ e lunghezza $l$ è posizionata come in figura. Il contatto con la parete verticale è liscio, mentre il coefficiente di attrito statico del contatto col pavimento è $\mu_s$. Un uomo, che assimiliamo ad un punto materiale di massa $m$, sale su di essa. Calcolare la massima distanza $d$ che può percorrere lungo la scala in funzione delle quantità date e dell'angolo $\theta$.

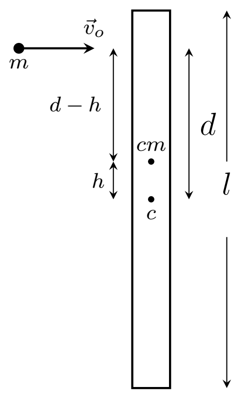



**Soluzione** - Un corpo rigido (nel nostro caso il sistema scala + uomo) è in equilibrio quando sono nulle la risultante delle forze esterne e la somma dei momenti di tali forze calcolati rispetto ad un qualsiasi punto. L'equilibrio delle forze lungo gli assi $x$ e $y$ si scrive rispettivamente:
$N - Mg - mg = 0 \quad ; \quad R - f_a = 0$
Se scegliamo come polo il punto d'appoggio della scala sulla parete i momenti delle forze sono tutti diretti lungo l'asse $z$ :
$(l-d)mg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \frac{l}{2}Mg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - lN\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + lf_a\sin(\pi-\theta) = 0 \quad \Rightarrow$
$(l-d)mg\cos\theta + \frac{l}{2}Mg\cos\theta - lN\cos\theta + lf_a\sin\theta = 0$
In queste equazioni i simboli rappresentano i moduli dei vettori definiti in figura; $\vec{R}$ ed $\vec{N}$, per la natura del vincolo, hanno necessariamente il verso indicato, mentre ad $\vec{f_a}$ abbiamo assegnato il verso che ci aspettiamo che tale forza debba avere. Se dalla soluzione del sistema di equazioni dovesse risultare che $R$ o $N$ sono negativi, vorrebbe dire che l'equilibrio è impossibile nella configurazione data, mentre se dovesse risultare che $f_a$ è negativo, allora il verso è opposto a quello ipotizzato in figura.
Il sistema di tre equazioni permette di ricavare le tre incognite $R$, $N$ ed $f_a$ in funzione delle altre quantità, in particolare di $d$. Per rispondere alla domanda del problema è preferibile ricavare $d$ in funzione di $f_a$: l'applicazione della condizione $f_a \le \mu_s N$ ci darà la limitazione su $d$. Quindi ricaviamo $N$ dalla prima equazione, sostituiamolo nella terza, ricaviamo $d$ dalla terza e sostituiamo la condizione su $f_a$ , che risulta essere $\quad f_a \le \mu_s(m+M)g$ :
$d = l\left(\frac{f_a}{mg}\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{M}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad d_{max} = l\left(\mu_s\left(1+\frac{M}{m}\right)\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{M}{m}\right)$
Come vediamo, $\frac{d_{max}}{l}$ dipende da tre parametri: aumenta con $\mu_s$ e $\theta$, mentre non è immediato analizzare l'andamento al variare di $\frac{M}{m}$; inserendo i valori $\mu_s = 0.5$ (vedi tabelle dei coefficienti d'attrito) e $\theta = \frac{\pi}{4}$ otteniamo $\frac{d_{max}}{l} = 0.5$; sembra un valore ragionevole, per una scala messa a 45 gradi !.
Notiamo che in questo caso non possiamo risolvere il problema analizzando l'andamento dell'energia potenziale perchè la forza d'attrito compie lavoro e non è conservativa.




---

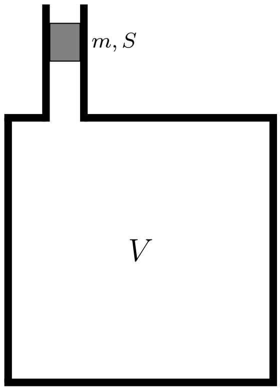
**Esercizio 2** - Una sbarretta omogenea di massa $M$ , lunghezza $l$ e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad $l$ è appoggiata su un piano orizzontale liscio ed è inizialmente in quiete; un proiettile di massa $m$ si muove come in figura ($c$ è il centro di massa della sbarretta) e si conficca nella sbaretta rimanendole solidale. L'urto avviene in un tempo sufficientemente breve perchè la sbarretta possa essere considerata a riposo durante tale processo. Detto $cm$ il centro di massa del sistema dopo l'urto:
a) Determinare la distanza di $cm$ da $c$ in funzione delle quantità definite in figura e delle masse;
b) scrivere l'espressione della velocità di $cm$ in funzione di $\vec{v_o}$;
c) scrivere l'espressione della velocità angolare di rotazione attorno a $cm$ in funzione di $v_o$.
Trascurare gli effetti della forza peso sul proiettile prima dell'urto.




**Soluzione** - Dopo l'urto, il centro di massa del sistema si trova ad una distanza da $c$ data da: $\quad h = \frac{m}{m+M}d.$
Trascurando la forza peso agente sul proiettile prima dell'urto, abbiamo che la risultante delle forze esterne agenti sul sistema (forza peso e reazione vincolare del piano) hanno risultante nulla sia prima che dopo l'urto (dopo l'urto il sistema si muoverà sul piano di appoggio). Quindi si conserva la quantità di moto. In un sistema di riferimento con origine fissa nel punto $c$, indicando con $\vec{v}_{cm}$ la velocità del centro di massa del sistema dopo l'urto, la conservazione della quantità di moto si scrive: $\quad m\vec{v}_o = (m+M)\vec{v}_{cm} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = \frac{m}{m+M}\vec{v}_o$
Per il momento angolare $\vec{L}$ calcolato rispetto ad un generico polo $p$ che abbia velocità $\vec{v}_p$ vale la relazione (dinamica dei sistemi):
$\frac{d\vec{L}}{dt} = -(m+M)\vec{v}_p \times \vec{v}_{cm} + \vec{\tau}_{ext}$
$\vec{\tau}_{ext}$ (somma dei momenti delle forze esterne) è nullo; se scegliamo come polo il centro di massa del sistema anche il primo addendo è nullo ed il momento angolare del sistema si conserva. Introducendo un asse $z$ verticale ed entrante nel piano della figura, $\vec{L}$ avrà solo componente lungo $z$ e la conservazione di $\vec{L}$ lungo $z$ prima e dopo l'urto si scriverà:
$mv_o(d-h) = I\omega$. $I$ è il momento d'inerzia rispetto al centro di massa del sistema: $\quad I = \frac{1}{12}Ml^2 + Mh^2 + m(d-h)^2.$
Quindi : $\quad \omega = \frac{mv_o(d-h)}{I} \quad ; \quad \vec{\omega} = \frac{mv_o(d-h)}{I}\hat{z}. \qquad$ Notare che $d-h>0.$
Domanda per i più curiosi: dove si trova, ad un generico istante di tempo, l'asse istantaneo di rotazione ?

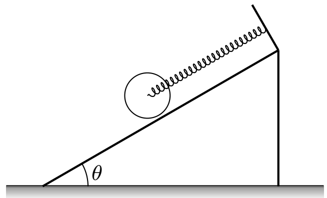
---

**Esercizio 3** - Un serbatoio di volume $V = 100l$ è collegato come in figura ad un pistone disposto orizzontalmente di massa $m = 0.05kg$ e sezione $S = 2cm^2$; la forza di attrito statico massima tra il pistone e le pareti del recipiente è $F = 0.3N$. Il recipiente contiene $0.1mol$ di gas perfetto monoatomico ed è a contatto con un termostato alla temperatura $T = 270K$.
Il pistone è in equilibrio meccanico ? se la risposta è sì calcolare la quantità di calore che bisogna sottrarre al gas, tolto il contatto col termostato ed ipotizzando che il calore venga scambiato lentamente e a volume costante, perchè inizi a muoversi.
Trascurare la pressione atmosferica ed il volume del tubo in cui scorre il pistone.




**Soluzione** - La forza peso e la forza d'attrito hanno la stessa direzione verticale, la forza d'attrito può essere rivolta verso l'alto o verso il basso; il gas esercita sul pistone una forza diretta verso l'alto di modulo $pS$, dove $p$ è la pressione. Introducendo un asse $z$ verticale diretto verso il basso ed indicando con $f_a$ la componente della forza d'attrito lungo $z$ (può essere positiva o negativa) , la condizione d'equilibrio del pistone lungo $z$ si scrive: $mg + f_a - pS = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{mg+f_a}{S}$.
$f_a$ (attrito statico) può assumere tutti i valori compresi tra $-F$ ed $F$, quindi il pistone è in equilibrio per
$\frac{mg-F}{S} \leq p \leq \frac{mg+F}{S} \quad (*) \quad \Rightarrow \quad$ (equazione di stato, $T = \frac{pV}{nR}$) $\quad \frac{mg-F}{nRS}V \leq T \leq \frac{mg+F}{nRS}V$
Numericamente, ed utilizzando il valore molto approssimato $g \approx 10ms^{-2}$: $\quad 120K \leq T \leq 481K$. Quindi alla temperatura data il pistone è in equilibrio. Indicando con $T_1$ la temperatura di equilibrio inferiore, per portare il gas ad una temperatura minore di $T_1$ e far muovere il pistone dobbiamo sottrargli una quantità di calore maggiore di $nc_v(T - T_1)$.
Se volessimo tener conto della pressione atmosferica $p_a$, dovremmo aggiungere $p_a$ ai due valori estremi in $(*)$.

**Esercizio 1** - Nel sistema in figura la molla ha costante elastica $k$ e lunghezza di riposo $\ell_0$ e il disco (massa $m$, raggio $R$) rotola senza strisciare sul piano inclinato. Inizialmente la molla ha lunghezza $\ell_0$ ed il disco ha velocità nulla; calcolare:
a) La lunghezza della molla alla quale il sistema è in equilibrio.
b) La velocità del centro di massa e la velocità angolare del disco nel punto di equilibrio.




**Soluzione** - Introduciamo un asse $x$ nel piano della figura, parallelo al piano inclinato, rivolto verso il basso e con l'origine nell'estremo della molla vincolato al piano inclinato; scegliendo la quota di tale punto come zero dell'energia potenziale della forza peso, l'energia potenziale del sistema si scrive:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 - mgx\sin\theta$$

I due termini rappresentano l'energia potenziale elastica e quella della forza peso. Le altre due forze agenti sul disco, reazione normale del piano inclinato e forza d'attrito statico, non compiono lavoro. (notare: il centro di massa si trova al di sotto del livello zero dell'energia potenziale della forza peso , che è quindi negativa). Indicando con $U'$ la derivata rispetto ad $x$, la condizione di equilibrio è data da:

$$U'(x) = k(x-\ell_0) - mg\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = \ell_0 + \frac{mg\sin\theta}{k}$$

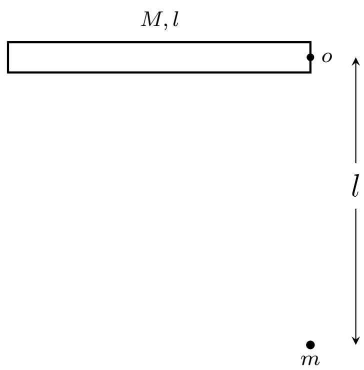
(notare: $x_{eq} > \ell_0$, $x_{eq}$ aumenta con $\theta$ e diminuisce con $k$). Per calcolare la velocità nella posizione di equilibrio, applichiamo la conservazione dell'energia tra la posizione iniziale, nella quale l'energia cinetica e quella potenziale elastica sono nulle, e la posizione $x_{eq}$:

$$-mg\ell_0\sin\theta = \frac{1}{2}k(x_{eq}-\ell_0)^2 - mgx_{eq}\sin\theta + \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{(mg\sin\theta)^2}{k} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad v_{cm} = \pm g\sin\theta\sqrt{\frac{2}{3}\frac{m}{k}}$$

I quattro termini a destra sono rispettivamente: energia potenziale elastica e della forza peso, energia cinetica del centro di massa, energia cinetica di rotazione. $v_{cm}$ è la velocità scalare lungo l'asse $x$, $I = \frac{1}{2}mR^2$ è il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse perpendicolare alla sua superficie passante per il centro di massa. Poichè il moto è di rotolamento puro, $\omega = \frac{v_{cm}}{R}$. La seconda uguaglianza si ottiene sostituendo l'espressione di $x_{eq}$, la terza quella di $I$ ed $\omega$. L'espressione finale è molto semplice perchè si è scelto come posizione iniziale quella di riposo della molla.

---

**Esercizio 2** - Una sbarretta omogenea di massa $M$ , lunghezza $l$ e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad $l$ può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato ad un suo estremo. Inizialmente la sbarretta si trova in posizione orizzontale, come in figura. Viene lasciata libera ed urta un corpo di massa $m$ assimilabile ad un punto materiale , situato nella posizione indicata in figura ed inizialmente a riposo , che si conficca nella sbarretta.
a) Scrivere l'espressione della velocità angolare della sbarretta subito prima dell'urto.
b) Scrivere l'espressione della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto.
c) Scrivere l'espressione del valore massimo dell'angolo che il sistema forma con la verticale dopo l'urto.




**Soluzione**
a) Prima dell'urto sulla sbarretta agiscono la forza peso, conservativa, e la reazione vincolare dell'asse, che non compie lavoro. Si conserva dunque l'energia totale. Fissando in $o$ il livello zero dell'energia potenziale della forza peso, la conservazione dell'energia si scrive:
$0 = -Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad ; \quad I = \frac{1}{3}Ml^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{3\frac{g}{l}}$
b) L'unica quantità che si conserva durante l'urto è il momento angolare rispetto ad $o$. Infatti il momento della reazione vincolare è nullo rispetto a tale punto, come pure quello della forza peso agente sulla sbarretta e sul proiettile, se la sbarretta resta in posizione verticale durante l'urto; i momenti delle forze interne tra sbarretta e proiettile si annullano reciprocamente. La quantità di moto invece non si conserva: la sua variazione è prodotta dalla reazione vincolare. Inizialmente il punto materiale è a riposo, quindi il momento angolare iniziale è quello della sola sbarretta, è perpendicolare ed uscente dal piano della figura. Introducendo un asse $z$ che ha tale direzione e verso ed indicando con $\omega'$ il modulo della velocità angolare subito dopo l'urto, l'uguaglianza tra le componenti $z$ dei momenti angolari iniziale e finale si scrive in modo molto semplice:
$I\omega = I'\omega' \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{I}{I'}\omega \quad ; \quad I' = \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2$
c) Dopo l'urto valgono le stesse considerazioni del punto a). Indicando con $\theta_m$ l'angolo massimo e considerando che nella posizione $\theta_m$ l'energia cinetica è nulla, la conservazione dell'energia tra le posizioni $\theta = 0$ e $\theta = \theta_m$ si scrive:
$\frac{1}{2}I'\omega'^2 - Mg\frac{l}{2} - mgl = (-Mg\frac{l}{2} - mgl)\cos\theta_m \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_m = 1 - \frac{\frac{1}{2}I'\omega'^2}{Mg\frac{l}{2}+mgl} = 1 - \frac{1}{6(\frac{1}{3}+\frac{m}{M})(\frac{1}{2}+\frac{m}{M})}$
notare il valore che si ottiene per $m = 0$.

---

**Esercizio 3** - Un gas perfetto esegue un ciclo reversibile a partire da un volume ed una pressione iniziali $V_1$ e $p_1$ . Il ciclo è costituito da:
1) una espansione isoterma fino ad un volume $V_2$;
2) una compressione isobara fino al volume $V_1$;
3) una trasformazione isocora che lo riporta nello stato iniziale.

a) Rappresentare il ciclo nel piano $p-V$.
b) Detta $T_1$ la temperatura iniziale, scrivere l'espressione di $T_2$, temperatura alla fine della compressione isobara, in funzione di $T_1, V_1$ e $V_2$.
c) Calcolare il rendimento del ciclo in funzione di $T_1, T_2, V_1$ e $V_2$.

**Soluzione**
b)Indicando con $p_2$ la pressione dell'isobara, scriviamo l'equazione di stato all'inizio ed al termine della trasformazione:
$p_2V_2 = nRT_1 \quad ; \quad p_2V_1 = nRT_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_1}{V_2}.$

c) Il calore assorbito ed il lavoro eseguito dal sistema nelle tre trasformazioni sono dati da:

$Q_1 = n \cdot R \cdot T_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ $\quad W_1 = Q_1$ $\quad$ ($Q_1 > 0$ : il sistema assorbe calore ed esegue un lavoro sull'esterno)

$Q_2 = n \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) < 0$ $\quad W_2 = p_2 \cdot (V_1 - V_2)$ $\quad$ ( $W_2 < 0$ : viene eseguito un lavoro sul sistema, che deve cedere calore per restare alla stessa pressione)

$Q_3 = n \cdot c_v \cdot (T_1 - T_2)$ $\quad W_3 = 0$ $\quad$ ($Q_3 > 0$ : il sistema deve ricevere calore per aumentare la pressione a volume costante)

Il rendimento del ciclo è il rapporto tra il lavoro netto compiuto dal sistema ed il calore assorbito dall'esterno:

$$\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_1 + Q_3} = \frac{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + p_2(V_1 - V_2)}{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nc_v(T_1 - T_2)} = \frac{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nR(T_2 - T_1)}{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nc_v(T_1 - T_2)}$$