

Analisi Matematica II
Integrali curvilinei

Esercizio 1. Calcolare la lunghezza delle seguenti curve, descritte con equazioni parametriche, o come grafici di funzioni

- (1) $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [0, 1]$,
- (2) $\gamma(t) = (\arccos t, \log t)$, $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,
- (3) $\gamma(t) = (e^t - 1, e^{2t} + 1)$, $t \in [0, 1]$,
- (4) $\gamma(t) = (3t^2 + 10t, 4t^2 + 5t)$, $t \in [-1, 1]$,
- (5) $\gamma(t) = (t, \sqrt{8t}, \log t)$, $t \in [1, 2]$,
- (6) $\gamma(t) = (\frac{1}{4} \cos 2t, \cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- (7) $\gamma(t) = (4 \cos t - \cos 4t, 4 \sin t - \sin 4t)$, $t \in [0, 2\pi]$,
- (8) $\gamma(t) = (\cosh t \cos t, \cosh t \sin t, t)$, $t \in [0, 1]$.
- (9) $y = (3 + 2x)^{3/2}$, $x \in [0, 2]$,
- (10) $y = \log \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$,
- (11) $y = \sqrt{1 + 2x}$, $x \in [0, \frac{3}{2}]$,
- (12) $y = \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}$, $x \in [0, 5]$,
- (13) $y = x^2$, $x \in [1, 2]$,
- (14) $y = x + \frac{2}{3}x^{3/2}$, $x \in [0, 1]$,
- (15) [spirale logaritmica] $\rho(\vartheta) = e^{3\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 1]$.
- (16) [spirale di Archimede] $\rho(\vartheta) = 2\vartheta$, $\vartheta \in [0, 1]$,

Esercizio 2. Calcolare $\int_{\gamma} f ds$, dove

- (1) $f(x, y) = \sin x + \cos y$ e $\gamma(t) = (\pi t, 2\pi t)$, $t \in [0, 1]$,
- (2) $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$,
- (3) $f(x, y) = x^2 y$ e $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in [\pi/2, \pi]$,
- (4) $f(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$,
- (5) $f(x, y) = x^3 + y$ e $\gamma(t) = (2t, t^3)$, $t \in [0, 1]$,
- (6) $f(x, y, z) = z$ e $\gamma(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$, $t \in [0, 2\pi]$,
- (7) $f(x, y, z) = \sqrt{z}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, 1]$,
- (8) $f(x, y) = \sqrt{x + 2y}$ e γ è il segmento di \mathbb{R}^2 congiungente i punti (1, 2) e (3, 6),
- (9) $f(x, y) = x^2$ e γ è il grafico della funzione $y = \log x$, $x \in [1, 2]$,
- (10) $f(x, y) = y^2$ e γ è il grafico della funzione $y = e^x$, $x \in [0, \log 2]$,
- (11) $f(x, y) = y$ e γ è il grafico della funzione $y = \sqrt{1 + x^2}$, $x \in [0, 1]$,

(12) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e γ è la curva di equazione polare $\rho(\vartheta) = \vartheta$, $\vartheta \in [0, 1]$.



Analisi Matematica II
Integrali curvilinei (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (3t^2, 2t), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= 9t^4 + 4t^2 = t^2(9t^2 + 4), \\ \ell(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 4} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{18} \int_4^{13} \sqrt{x} dx = \frac{1}{27} [x^{2/3}]_4^{13} = \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8),\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $9t^2 + 4 = x \implies 18t dt = dx$.

(2) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{1}{t}\right), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= \frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2(1-t^2)}, \\ \ell(\gamma) &= \int_{1/2}^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} \stackrel{(a)}{=} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} \stackrel{(b)}{=} \int_{\text{tg}(\pi/12)}^1 \frac{y^2+1}{2y} \frac{2}{y^2+1} dy \\ &= \left[\log y\right]_{\text{tg}(\pi/12)}^1 = -\log \text{tg} \frac{\pi}{12},\end{aligned}$$

dove si è usato, in (a) la sostituzione $t = \sin x \implies dt = \cos x dx$, in (b) la sostituzione $x = 2 \arctg y$, per cui $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$.

(3) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (e^t, 2e^{2t}), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= e^{2t} + 4e^{4t} = e^{2t}(1 + 4e^{2t}), \\ \ell(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 e^t \sqrt{1 + 4e^{2t}} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \int_2^{2e} \sqrt{x^2 + 1} dx \stackrel{(b)}{=} \frac{1}{2} \int_{2+\sqrt{5}}^{2e+\sqrt{4e^2+1}} \frac{y^2+1}{2y} \frac{y^2+1}{2y^2} dy \\ &= \frac{1}{8} \int_{2+\sqrt{5}}^{2e+\sqrt{4e^2+1}} \left(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dy = \frac{1}{8} \left[\frac{y^2}{2} + 2 \log y - \frac{1}{2y^2}\right]_{2+\sqrt{5}}^{2e+\sqrt{4e^2+1}} \\ &= \frac{1}{2} (e\sqrt{4e^2+1} - \sqrt{5}) + \frac{1}{4} \log \frac{2e + \sqrt{4e^2+1}}{2 + \sqrt{5}},\end{aligned}$$

dove si è usato, in (a) la sostituzione $2e^t = x \implies 2e^t dt = dx$, in (b) la sostituzione $\sqrt{x^2 + 1} = y - x$, per cui $x = \frac{y^2-1}{2y}$, $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{y^2+1}{2y}$, $dx = \frac{y^2+1}{2y^2} dy$.

(4) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (6t + 10, 8t + 5), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= (6t + 10)^2 + (8t + 5)^2 = 25(4t^2 + 8t + 5), \\ \ell(\gamma) &= \int_{-1}^1 \|\gamma'(t)\| dt = 5 \int_{-1}^1 \sqrt{4t^2 + 8t + 5} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{5}{4} \int_0^8 \sqrt{x^2 + 1} dx \stackrel{(b)}{=} \frac{5}{4} \int_1^{8+\sqrt{65}} \frac{y^2 + 1}{2y} \frac{y^2 + 1}{2y^2} dy \\ &= \frac{5}{16} \int_1^{8+\sqrt{65}} \left(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3} \right) dy = \frac{5}{16} \left[\frac{y^2}{2} + 2 \log y - \frac{1}{2y^2} \right]_1^{8+\sqrt{65}} = 5\sqrt{65} + \frac{5}{8} \log(8 + \sqrt{65}),\end{aligned}$$

dove si è usato, in (a) la sostituzione $4(t + 1) = x$, in (b) la sostituzione $\sqrt{x^2 + 1} = y - x$, per cui $x = \frac{y^2 - 1}{2y}$, $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{y^2 + 1}{2y}$, $dx = \frac{y^2 + 1}{2y^2} dy$.

(5) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(1, \sqrt{\frac{2}{t}}, \frac{1}{t} \right), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= 1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{(t + 1)^2}{t^2}, \\ \ell(\gamma) &= \int_1^2 \|\gamma'(t)\| dt = \int_1^2 \frac{t + 1}{t} dt = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt = \left[t + \log t \right]_1^2 = 1 + \log 2.\end{aligned}$$

(6) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(-\frac{1}{2} \sin(2t), -3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t \right), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= \frac{1}{4} \sin^2(2t) + 9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t = \frac{5}{2} \sin^2(2t), \\ \ell(\gamma) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(2t)| dt = \sqrt{10} \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = -\frac{\sqrt{10}}{2} \left[\cos(2t) \right]_0^{\pi/2} = \sqrt{10}.\end{aligned}$$

(7) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-4 \sin t + 4 \sin 4t, 4 \cos t - 4 \cos 4t), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= (-4 \sin t + 4 \sin 4t)^2 + (4 \cos t - 4 \cos 4t)^2 = 32(1 - \cos 3t) = 64 \sin^2 \left(\frac{3}{2} t \right), \\ \ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = 16 \int_0^{2\pi} \left| \sin \left(\frac{3}{2} t \right) \right| dt = 24 \int_0^{2\pi/3} \sin \left(\frac{3}{2} t \right) dt \stackrel{(a)}{=} 16 \int_0^\pi \sin x dx \\ &= 16 \left[-\cos x \right]_0^\pi = 32,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\frac{3}{2}t = x \implies \frac{3}{2} dt = dx$.

(8) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (\sinh t \cos t - \cosh t \sin t, \sinh t \sin t - \cosh t \cos t, 1), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= (\sinh t \cos t - \cosh t \sin t)^2 + (\sinh t \sin t - \cosh t \cos t)^2 + 1 = 2(\cosh t)^2, \\ \ell(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{2} \int_0^1 \cosh t dt = \sqrt{2} \left[\sinh t \right]_0^1 = \sqrt{2} \sinh 1 = \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(9) Si ha

$$\ell(\gamma) = \int_0^2 \sqrt{1+9(3+2x)} dx \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{9} \int_{2\sqrt{7}}^8 y^2 dy = \frac{1}{27} [y^3]_{2\sqrt{7}}^8 = \frac{512-56\sqrt{7}}{27},$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{18x+28} = y$, per cui $x = \frac{y^2-28}{18}$, $dx = \frac{1}{9}y dy$.

(10) Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} \stackrel{(a)}{=} \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1+y^2}{1-y^2} \frac{2}{1+y^2} dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}/3} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} \right) dy = \left[\log \left| \frac{y+1}{y-1} \right| \right]_0^{\sqrt{3}/3} = \log \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \log(2+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $x = 2 \operatorname{arctg} y$, per cui $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, $dx = \frac{2}{y^2+1} dy$.

(11) Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^{3/2} \sqrt{1+\frac{1}{1+2x}} dx = \int_0^{3/2} \sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}} dx \stackrel{(a)}{=} \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \frac{y^2}{(y^2-1)^2} dy \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{4} \left[\log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right]_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{4} \log \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}, \end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $\sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}} = y$, per cui $x = -\frac{y^2-2}{2(y^2-1)}$, $dx = -\frac{y}{(y^2-1)^2} dy$, in (b) la decomposizione $\frac{y^2}{(y^2-1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)^2} \right)$.

(12) Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^5 \sqrt{1+\frac{x(9-x)^2}{(6-x)^3}} dx = 3\sqrt{3} \int_0^5 \frac{1}{6-x} \sqrt{\frac{8-x}{6-x}} dx \stackrel{(a)}{=} 3\sqrt{3} \int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} \frac{y^2-1}{2} y \frac{4y}{(y^2-1)^2} dy \\ &= 6\sqrt{3} \int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{(y^2-1)^2} dy = 6\sqrt{3} \int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y+1} \right) dy \\ &= 6\sqrt{3} \left[y + \frac{1}{2} \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| \right]_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} = 6 + 3\sqrt{3} \log \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 3\sqrt{3} \log \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 6 + 3\sqrt{3} \log(2+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{\frac{8-x}{6-x}} = y$, per cui $x = \frac{6y^2-8}{y^2-1}$, $dx = \frac{4y}{(y^2-1)^2} dy$.

(13) Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_1^2 \sqrt{1+(2x)^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int_{2+\sqrt{5}}^{4+\sqrt{17}} \frac{y^2+1}{2y} \frac{y^2+1}{4y^2} dy = \frac{1}{8} \int_{2+\sqrt{5}}^{4+\sqrt{17}} \left(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3} \right) dy \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{y^2}{2} + 2 \log |y| - \frac{1}{2y^2} \right]_{2+\sqrt{5}}^{4+\sqrt{17}} = \sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{4+\sqrt{17}}{2+\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{1+4x^2} = y-2x$, per cui $x = \frac{y^2-1}{4y}$, $dx = \frac{y^2+1}{4y^2} dy$, $\sqrt{1+4x^2} = \frac{y^2+1}{2y}$.

Alternativamente, si ha

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_1^2 \sqrt{1+4x^2} dx \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \int_{\operatorname{arsinh} 2}^{\operatorname{arsinh} 4} \cosh^2 y dy = \frac{1}{4} \int_{\operatorname{arsinh} 2}^{\operatorname{arsinh} 4} (\cosh 2y + 1) dy = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \sinh 2y + y \right]_{\operatorname{arsinh} 2}^{\operatorname{arsinh} 4} \\ &= \frac{1}{4} \sinh \operatorname{arsinh} 4 \cosh \operatorname{arsinh} 4 - \frac{1}{4} \sinh \operatorname{arsinh} 2 \cosh \operatorname{arsinh} 2 + \frac{1}{4} \log \frac{4 + \sqrt{17}}{2 + \sqrt{5}} \\ &= \sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{4 + \sqrt{17}}{2 + \sqrt{5}},\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $2x = \sinh y$, $dx = \frac{1}{2} \cosh y dy$.

(14) Si ha

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{1 + (1 + \sqrt{x})^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int_1^2 2(y-1) \sqrt{y^2 + 1} dy \stackrel{(b)}{=} \int_2^5 \sqrt{z} dz - 2 \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{z^2 + 1}{2z} \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz \\ &= \frac{2}{3} \left[z^{3/2} \right]_2^5 - \frac{1}{2} \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3} \right) dz = \frac{2}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{2} + 2 \log z - \frac{1}{2z^2} \right]_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \\ &= \frac{10}{3} \sqrt{5} - \frac{4}{3} \sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{2} - \log \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{5} - \frac{1}{3} \sqrt{2} - \log \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}},\end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $1 + \sqrt{x} = y$, per cui $x = (y-1)^2$, $dx = 2(y-1) dy$, in (b) la sostituzione $z = y^2 + 1$, per cui $dz = 2y dy$, nel primo integrale, e $\sqrt{1 + y^2} = z - y$, per cui $y = \frac{z^2 - 1}{2z}$, $dy = \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz$, $\sqrt{1 + y^2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$, nel secondo integrale.

(15) Si ha

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{9e^{6\vartheta} + e^{6\vartheta}} d\vartheta = \sqrt{10} \int_0^1 e^{3\vartheta} d\vartheta = \frac{\sqrt{10}}{3} \left[e^{3\vartheta} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{10}}{3} (e^3 - 1).$$

(16) Si ha

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{4 + 4\vartheta^2} d\vartheta = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta \stackrel{(a)}{=} 2 \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{z^2 + 1}{2z} \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3} \right) dz = \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{2} + 2 \log z - \frac{1}{2z^2} \right]_1^{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}),\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{1 + \vartheta^2} = z - \vartheta$, per cui $\vartheta = \frac{z^2 - 1}{2z}$, $d\vartheta = \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz$, $\sqrt{1 + \vartheta^2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$.

□

Svolgimento esercizio 2

(1) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sin(\pi t) + \cos(2\pi t)$, e $\|\gamma'(t)\| = \pi\sqrt{5}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \pi\sqrt{5} \int_0^1 (\sin(\pi t) + \cos(2\pi t)) dt = \pi\sqrt{5} \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi} + \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} \right]_0^1 = 2\sqrt{5}.$$

(2) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t|$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\pi} |\cos t| dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 2 \left[\sin t \right]_0^{\pi/2} = 2.$$

(3) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = (2 \cos t)^2 \cdot 2 \sin t = 8 \cos^2 t \sin t$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = 2$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\pi/2}^{\pi} 16 \cos^2 t \sin t dt \stackrel{(a)}{=} 16 \int_{-1}^0 x^2 dx = \frac{16}{3} \left[x^3 \right]_{-1}^0 = \frac{16}{3},$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\cos t = x$, per cui $dx = -\sin t dt$.

(4) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} dt \stackrel{(a)}{=} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \left[\arctg x \right]_0^1 = \arctg \frac{\pi}{4} = 1,$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sin t = x$, per cui $dx = \cos t dt$.

(5) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = (2t)^3 + t^3 = 9t^3$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4 + 9t^4}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 9t^3 \sqrt{4 + 9t^4} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{4} \int_4^{13} \sqrt{x} dx = \frac{1}{6} \left[x^{3/2} \right]_4^{13} = \frac{1}{6} (13\sqrt{13} - 8),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $4 + 9t^4 = x$, per cui $dx = 36t^3 dt$.

(6) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = 4t$, e $\|\gamma'(t)\| = 5$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{2\pi} 5 \cdot 4t dt = \left[10t^2 \right]_0^{2\pi} = 40\pi^2.$$

(7) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = t$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{8} \int_1^5 \sqrt{x} dx = \frac{1}{12} \left[x^{3/2} \right]_1^5 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1 + 4t^2 = x$, per cui $dx = 8t dt$.

(8) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (1-t)(1, 2) + t(3, 6) = (1+2t, 2+4t)$, $t \in [0, 1]$. Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{(1+2t) + 2(2+4t)} = \sqrt{5+10t}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = 10 \int_0^1 \sqrt{1+2t} dt \stackrel{(a)}{=} 5 \int_1^3 \sqrt{x} dx = \frac{10}{3} \left[x^{3/2} \right]_1^3 = \frac{10}{3} (3\sqrt{3} - 1),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1 + 2t = x$, per cui $dx = 2 dt$.

(9) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t, \log t)$, $t \in [1, 2]$. Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_1^2 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = t^2$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 t \sqrt{t^2 + 1} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \int_2^5 \sqrt{x} dx = \frac{1}{3} [x^{3/2}]_2^5 = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $t^2 + 1 = x$, per cui $dx = 2t dt$.

(10) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t, e^t)$, $t \in [0, \log 2]$. Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\log 2} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = e^{2t}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + e^{2t}}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\log 2} e^{2t} \sqrt{1 + e^{2t}} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \int_2^5 \sqrt{x} dx = \frac{1}{3} [x^{3/2}]_2^5 = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1 + e^{2t} = x$, per cui $dx = 2e^{2t} dt$.

(11) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t, \sqrt{1+t^2})$, $t \in [0, 1]$. Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{1+t^2}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{2t^2+1}{t^2+1}}$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_0^1 \sqrt{2t^2 + 1} dt \stackrel{(a)}{=} \int_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{2x} \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{2}x^2} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{x^2}{2} + 2 \log x - \frac{1}{2x^2} \right]_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} + \sqrt{3}), \end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{2t^2 + 1} = x - \sqrt{2}t$, per cui $t = \frac{x^2-1}{2\sqrt{2}x}$, $dt = \frac{x^2+1}{2\sqrt{2}x^2} dx$, $\sqrt{1 + 2t^2} = \frac{x^2+1}{2x}$.

(12) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$, $t \in [0, 1]$. Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = t$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + t^2}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 t \sqrt{1 + t^2} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{x} dx = \frac{1}{3} [x^{3/2}]_1^2 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1 + t^2 = x$, per cui $dx = 2t dt$.

□

