Analisi Matematica II
Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Esercizio 1. Verificare che le seguenti funzioni sono soluzioni delle equazioni differenziali indicate

(1) $y(x) = \int_0^x e^t \sin 2(x-t)\, dt, \quad y''(x) + 4y(x) = 2e^x,$

(2) $y(x) = \int_0^x e^x \sin(x-t)\, dt, \quad y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x,$

(3) $y(x) = \int_0^x (x-t)e^{2x-t}\, dt, \quad y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^x,$

(4) $y(x) = \int_0^x e^{x-t}(e^{x-t}-1)\cos t\, dt, \quad y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \cos x,$

(5) $y(x) = \int_0^x \big(1-\cos(x-t)\big)\sin t\, dt, \quad y'''(x) + y'(x) = \sin x.$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^{x^2} \frac{1+\sin x^2y^2}{x^2}\, dy,$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^{x} \frac{y\cos^2(x^2(1+y^2))}{x^2}\, dy.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^{x^2} \frac{(x^2-y)\cos y^2}{\sin x^4}\, dy,$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^{x} \frac{(x-y)e^{-y^2}}{\sin^2 x}\, dy,$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^{1} \frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2}\, dy,$

Esercizio 3. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2, nel punto (x_0, y_0) indicato, delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3, \quad (x_0,y_0) = (1,2),$

(2) $f(x,y) = x\sin y, \quad (x_0,y_0) = (0,0),$

(3) $f(x,y) = x^2y + y\sin x, \quad (x_0,y_0) = (\pi,0),$

(4) $f(x,y) = (1-\cos x)e^y, \quad (x_0,y_0) = (0,0).$

Esercizio 4. Studiare concavità/convessità delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = -x^2 - y^2,$

(2) $f(x,y) = x^4 + y^4,$

(3) $f(x,y) = x^3 + y^3.$

(4) $f(x,y) = x^2y^2 + 6y^2,$

(5) $f(x,y) = x^2y^2,$

(6) $f(x,y) = -2x^2y + xy^2 + x - y - 1,$

(7) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$

(8) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$,

Esercizio 5. Determinare la natura dei punti stazionari delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x$,

(2) $f(x,y) = 2(x^2+y^2+1) - (x^4+y^4)$,

(3) $f(x,y) = 2(x^4+y^4+1) - (x+y)^2$,

(4) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$,

(5) $f(x,y) = (x-y)e^{-(x^2+y^2)}$,

(6) $f(x,y) = (x^2+xy+y^2)e^{x+2y}$,

(7) $f(x,y) = (x^2+xy+2y^2)e^{x+y}$,

(8) $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$,

(9) $f(x,y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2y^2 - 4xy$,

(10) $f(x,y) = -\sin x \sin(2y)$,

(11) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,

(12) $f(x,y) = xy|y|$.

Esercizio 6. Mostrare che le equazioni seguenti definiscono, in un intorno del punto (x_0,y_0) indicato, un'unica funzione $y = f(x)$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0.

(1) $F(x,y) = x(x^2+y^2) - 2y^2 = 0\,,\quad (1,1)$,

(2) $F(x,y) = y\sin x + xe^y - 2 = 0\,,\quad (2,0)$,

(3) $F(x,y) = xe^y + y\sin(x-1) - 2x - 4y + 1 = 0\,,\quad (1,0)$,

(4) $F(x,y) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + e^{xy-1} - 2 = 0\,,\quad (-1,-1)$,

(5) $F(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \dfrac{\pi}{6} - \log 2 = 0\,,\quad (\sqrt{3},1)$.

Esercizio 7. Mostrare che le equazioni seguenti definiscono, in un intorno del punto (x_0,y_0,z_0) indicato, un'unica funzione $z = f(x,y)$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0,y_0).

(1) $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+1 = 0\,,\quad (3,-1,1)$,

(2) $F(x,y,z) = xyz - 6 = 0\,,\quad (1,-2,-3)$,

(3) $F(x,y,z) = xy + yz + zx - 3 = 0\,,\quad (1,1,1)$,

(4) $F(x,y,z) = \displaystyle\int_1^z \sin(x^2t^2)\,dt + x^2y + y^2 - z^2 = 0\,,\quad (0,1,1)$.

Esercizio 8. Mostrare che i sistemi di equazioni seguenti definiscono, in un intorno del punto indicato, un'unica funzione vettoriale f. Determinare le derivate prime di f nel corrispondente punto.

(1) $\begin{cases} t^2 + x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ tx + ty^2 - t^2 = 0, \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t)), \quad (t_0, x_0, y_0) = (1, 0, 1),$

(2) $\begin{cases} t + x + 2y + 3z = 3 \\ t^2 + x^2 - 2y^2 + z^2 = -1 \\ t^3 + x^3 - y^3 + z^3 = 0, \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (t_0, x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1, 0),$

(3) $\begin{cases} x^2 + uy^2 - v = 0 \\ xy + 2y^2 - uv = 3 \end{cases} \qquad f(u, v) = (x(u, v), y(u, v)), \quad (u_0, v_0, x_0, y_0) = (0, 1, 1, 1).$

(4) $\begin{cases} x^3 + xy - 2uz^2 = 1 \\ y^2 - uyz - z^2 + v = -1 \\ vx^2 + xz - z^2 + uv = 0 \end{cases} \qquad f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u_0, v_0, x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1, 0, 1).$

Esercizio 9. Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni nei domini indicati

(1) $f(x, y) = x^4 + y^4\,, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$

(2) $f(x, y) = xy + y^2\,, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy = 1\},$

(3) $f(x, y) = y^2\,, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 - y = 0\},$

(4) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\,, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\},$

(5) $f(x, y) = xye^{\frac{xy}{x^2+y^2}}\,, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, x > 0\}.$

Esercizio 10. Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni nei domini indicati

(1) $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^2 + 3\,, \quad D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\big\},$

(2) $f(x, y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 32(x^2 + y^2)\,, \quad D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\big\},$

(3) $f(x, y) = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\,, \quad D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\big\},$

(4) $f(x, y) = e^{(x+1)^2 + (y-1)^2}\,, \quad D = [0, 1] \times [0, 1],$

(5) $f(x, y) = 24x^4 + 3y^4 - (x - y)^2\,, \quad D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\big\},$

(6) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2} - \dfrac{1}{2}x^2 - y^2\,, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \leq 4, y \geq \dfrac{1}{2}\},$

(7) $f(x, y, z) = (x - y)^2\,, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$

Analisi Matematica II
Calcolo differenziale per funzioni di più variabili (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha

$$y'(x) = \big[e^t \sin 2(x-t)\big]_{t=x} + \int_0^x 2e^t \cos 2(x-t)\, dt = \int_0^x 2e^t \cos 2(x-t)\, dt,$$
$$y''(x) = \big[2e^t \cos 2(x-t)\big]_{t=x} - \int_0^x 4e^t \sin 2(x-t)\, dt = 2e^x - \int_0^x 4e^t \sin 2(x-t)\, dt,$$

per cui $y''(x) + 4y(x) = 2e^x + \int_0^x \big(-4+4\big)e^t \sin 2(x-t)\, dt = 2e^x$.

(2) Si ha

$$y'(x) = \big[e^x \sin(x-t)\big]_{t=x} + \int_0^x e^x\big(\sin(x-t)+\cos(x-t)\big)\, dt = \int_0^x e^x\big(\sin(x-t)+\cos(x-t)\big)\, dt,$$
$$y''(x) = \big[e^x\big(\sin(x-t)+\cos(x-t)\big)\big]_{t=x} + \int_0^x 2e^x \cos(x-t)\, dt = e^x + \int_0^x 2e^t \cos(x-t)\, dt,$$

per cui $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x + \int_0^x e^x\big(2\cos(x-t) - 2\sin(x-t) - 2\cos(x-t) + 2\sin(x-t)\big)\, dt = e^x$.

(3) Si ha

$$y'(x) = \big[(x-t)e^{2x-t}\big]_{t=x} + \int_0^x \big(e^{2x-t} + 2(x-t)e^{2x-t}\big)\, dt = \int_0^x \big(e^{2x-t} + 2(x-t)e^{2x-t}\big)\, dt,$$
$$y''(x) = \big[e^{2x-t} + 2(x-t)e^{2x-t}\big]_{t=x} + \int_0^x \big(4+4(x-t)\big)e^{2x-t}\, dt = e^x + \int_0^x \big(4+4(x-t)\big)e^{2x-t}\, dt,$$

per cui $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^x + \int_0^x \big(4x - 4t + 4 - 8x + 8t - 4 + 4x - 4t\big)e^{2x-t}\, dt = e^x$.

(4) Si ha

$$y'(x) = \big[e^{x-t}(e^{x-t}-1)\cos t\big]_{t=x} + \int_0^x \big(2e^{2(x-t)} - e^{x-t}\big)\cos t\, dt = \int_0^x \big(2e^{2(x-t)} - e^{x-t}\big)\cos t\, dt,$$
$$y''(x) = \big[\big(2e^{2(x-t)} - e^{2x-t}\big)\cos t\big]_{t=x} + \int_0^x \big(4e^{2(x-t)} - e^{x-t}\big)\cos t\, dt = \cos x + \int_0^x \big(4e^{2(x-t)} - e^{x-t}\big)\cos t\, dt,$$

per cui $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \cos x + \int_0^x \big((4-6+2)e^{2(x-t)} - (1-3+2)e^{x-t}\big)\cos t\, dt = \cos x$.

(5) Si ha

$$y'(x) = \big[(1-\cos(x-t))\sin t\big]_{t=x} + \int_0^x \sin(x-t)\sin t\, dt = \int_0^x \sin(x-t)\sin t\, dt,$$
$$y''(x) = \big[\sin(x-t)\sin t\big]_{t=x} + \int_0^x \cos(x-t)\sin t\, dt = \int_0^x \cos(x-t)\sin t\, dt,$$
$$y''(x) = \big[\cos(x-t)\sin t\big]_{t=x} - \int_0^x \sin(x-t)\sin t\, dt = \sin x - \int_0^x \sin(x-t)\sin t\, dt,$$

per cui $y'''(x) + y'(x) = \sin x$.

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha

$$\lim_{x\to0}\int_0^{x^2}\frac{1+\sin x^2y^2}{x^2}\,dy=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}1+\sin x^2y^2\,dy}{x^2}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{2x(1+\sin x^4)+\int_0^{x^2}2x\cos x^2y^2\,dy}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(1+\sin x^4+\int_0^{x^2}\cos x^2y^2\,dy\right)=1.$$

(2) Si ha

$$\lim_{x\to0}\int_0^{x}\frac{y\cos^2(x^2(1+y^2))}{x^2}\,dy=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}y\cos^2(x^2(1+y^2))\,dy}{x^2}$$
$$\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{x\cos^2(x^2+x^4)-\int_0^{x}2xy(1+y^2)\sin(2x^2+2x^2y^2)\,dy}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\cos^2(x^2+x^4)-\int_0^{x}y(1+y^2)\sin(2x^2+2x^2y^2)\,dy\right)=\frac{1}{2}.$$

(3) Si ha

$$\lim_{x\to0}\int_0^{x^2}\frac{(x^2-y)\cos y^2}{\sin x^4}\,dy=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(x^2-y)\cos y^2\,dy}{\sin x^4}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}2x\cos y^2\,dy}{4x^3\cos x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\cos y^2\,dy}{2x^2\cos x^4}$$
$$\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{2x\cos x^4}{4x\cos x^4-8x^5\sin x^4}=\frac{1}{2}.$$

(4) Si ha $\lim_{x\to0}\int_0^{x}\frac{(x-y)e^{-y^2}}{\sin^2x}\,dy=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}(x-y)e^{-y^2}\,dy}{\sin^2x}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}e^{-y^2}\,dy}{2\sin x\cos x}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2}}{2\cos2x}=\frac{1}{2}.$

(5) Si ha

$$\lim_{x\to0}\int_0^{1}\frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2}\,dy=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{1}\log(1+x^2y^2)\,dy}{x^2}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{1}\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\,dy}{2x}\overset{(xy=t)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}\frac{2t^2}{1+t^2}\,dt}{2x^3}$$
$$\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

□

Svolgimento esercizio 3 Ricordiamo che il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0,y_0) è $T_2[f](x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+\frac{1}{2}f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{1}{2}f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$.

(1) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=3x^2+4xy+3y^2\\ f_y(x,y)&=2x^2+6xy-12y^2\\ f_{xx}(x,y)&=6x+4y\\ f_{xy}(x,y)&=4x+6y\\ f_{yy}(x,y)&=6x-24y.\end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x,y) = -15 + 23(x-1) - 34(y-2) + 7(x-1)^2 + 16(x-1)(y-2) - 21(y-2)^2 = 7x^2 + 16xy - 21y^2 - 23x + 34y - 15$.

(2) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \sin y \\ f_y(x,y) &= x \cos y \\ f_{xx}(x,y) &= 0 \\ f_{xy}(x,y) &= \cos y \\ f_{yy}(x,y) &= -x \sin y. \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x,y) = xy$.

(3) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy + y \sin x \\ f_y(x,y) &= x^2 + \sin x \\ f_{xx}(x,y) &= 2y - y \sin x \\ f_{xy}(x,y) &= 2x + \cos x \\ f_{yy}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x,y) = \pi^2 y + (2\pi - 1)(x - \pi)y = (2\pi - 1)xy - \pi^2 y + \pi y$.

(4) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^y \sin x \\ f_y(x,y) &= e^y (1 - \cos x) \\ f_{xx}(x,y) &= e^y \cos x \\ f_{xy}(x,y) &= e^y \sin x \\ f_{yy}(x,y) &= e^y (1 - \cos x). \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x,y) = \frac{1}{2}x^2$.

$\square$

Svolgimento esercizio 4

(1) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2x \\ f_y(x,y) &= -2y \\ f_{xx}(x,y) &= -2 \\ f_{xy}(x,y) &= 0 \\ f_{yy}(x,y) &= -2. \end{aligned}$$

Quindi, il determinante della matrice Hessiana di f è $\det H_f(x,y) = 4 > 0$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La traccia della matrice Hessiana di f è $\operatorname{tr} H_f(x,y) = -4 < 0$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora f è strettamente concava in $\mathbb{R}^2$.

(2) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 \\ f_y(x,y) &= 4y^3 \\ f_{xx}(x,y) &= 12x^2 \\ f_{xy}(x,y) &= 0 \\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2. \end{aligned}$$

Quindi, il determinante della matrice Hessiana di f è $\det H_f(x,y) = 144x^2y^2 > 0$, in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$. La traccia della matrice Hessiana di f è $\operatorname{tr} H_f(x,y) = 12(x^2+y^2) > 0$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Allora f è convessa in $\mathbb{R}^2$.

(3) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 \\ f_{xx}(x,y) &= 6x \\ f_{xy}(x,y) &= 0 \\ f_{yy}(x,y) &= 6y. \end{aligned}$$

Quindi, il determinante della matrice Hessiana di f è $\det H_f(x,y) = 36xy > 0$, in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$. La traccia della matrice Hessiana di f è $\operatorname{tr} H_f(x,y) = 6(x+y) > 0$, in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$. Allora f è strettamente convessa in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, e strettamente concava in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\}$, e altrove non è convessa, né concava.

(4) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy^2 \\ f_y(x,y) &= 2x^2y + 12y \\ f_{xx}(x,y) &= 2y^2 \\ f_{xy}(x,y) &= 4xy \\ f_{yy}(x,y) &= 2x^2 + 12. \end{aligned}$$

Quindi, il determinante della matrice Hessiana di f è $\det H_f(x,y) = -12(x^2-2)y^2 > 0 \iff |x| < \sqrt{2}$. La traccia della matrice Hessiana di f è $\operatorname{tr} H_f(x,y) = 2(x^2+y^2+6) > 0$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora f è strettamente convessa in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \sqrt{2}\}$, e nel complementare non è convessa, né concava.

(5) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy^2 \\ f_y(x,y) &= 2x^2y \\ f_{xx}(x,y) &= 2y^2 \\ f_{xy}(x,y) &= 4xy \\ f_{yy}(x,y) &= 2x^2. \end{aligned}$$

Quindi, il determinante della matrice Hessiana di f è $\det H_f(x,y) = -12x^2y^2 < 0$, per ogni $(x,y) \neq (0,0)$, per cui f non è convessa, né concava.

(6) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= -4xy + y^2 + 1 \\
f_y(x,y) &= -2x^2 + 2xy - 1 \\
f_{xx}(x,y) &= -4y \\
f_{xy}(x,y) &= -4x + 2y \\
f_{yy}(x,y) &= 2x.
\end{aligned}$$

Quindi, il determinante della matrice Hessiana di f è $\det H_f(x,y) = -4(4x^2 - 2xy + y^2) = -4\big((x-y)^2 + 3x^2\big) < 0$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per cui f non è convessa, né concava.

(7) Calcoliamo le derivate parziali di f in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si ha

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
f_y(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
f_{xx}(x,y) &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
f_{xy}(x,y) &= -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Quindi, il determinante della matrice Hessiana di f è $\det H_f(x,y) = 0$, per ogni $(x,y) \in A$. La traccia della matrice Hessiana di f è $\operatorname{tr} H_f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > 0$, per ogni $(x,y) \in A$. Allora f è convessa in $\mathbb{R}^2$.

(8) Calcoliamo le derivate parziali di f in $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\big\}$. Si ha

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\
f_y(x,y) &= -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\
f_{xx}(x,y) &= \frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \\
f_{xy}(x,y) &= -\frac{xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Quindi, il determinante della matrice Hessiana di f è $\det H_f(x,y) = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2} > 0$, per ogni $(x,y) \in A$. La traccia della matrice Hessiana di f è $\operatorname{tr} H_f(x,y) = \frac{x^2+y^2-2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} < 0$, per ogni $(x,y) \in A$. Allora f è concava in A.

$\square$

Svolgimento esercizio 5

(1) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -32xy + 1 = 0 \\ f_y(x,y) = 16y^3 - 16x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^{2/3} \\ x^{5/3} = \frac{1}{32} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -32y\,, \\ f_{xy}(x,y) &= -32x\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 48y^2\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(\frac{1}{8},\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\det H_f(\frac{1}{8},\frac{1}{4}) = -40$, e quindi $(\frac{1}{8},\frac{1}{4})$ è un punto di sella.

(2) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2) = 0 \\ f_y(x,y) = 4y - 4y^3 = 4y(1-y^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 4 - 12x^2\,, \\ f_{xy}(x,y) &= 0\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 4 - 12y^2\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4-12x^2 & 0 \\ 0 & 4-12y^2 \end{pmatrix}$, $\det H_f(x,y) = 16(1-3x^2)(1-3y^2)$, $\operatorname{tr} H_f(x,y) = 4(2 - 3x^2 - 3y^2)$, per cui $\det H_f(\pm1,\pm1) = 64$, $\operatorname{tr} H_f(\pm1,\pm1) = -16$, e quindi $(\pm1,\pm1)$ sono punti di massimo relativo; inoltre $\det H_f(0,\pm1) = \det H_f(\pm1,0) = -32$, e quindi $(0,\pm1)$ e $(\pm1,0)$ sono punti di sella; infine $\det H_f(0,0) = 14$, $\operatorname{tr} H_f(0,0) = 8$, e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo relativo.

(3) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 8x^3 - 2(x+y) = 0 \\ f_y(x,y) = 8y^3 - 2(x+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x^3 - 8y^3 = 0 \\ 4x^3 - x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ 4x^3 - 2x = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 24x^2 - 2\,, \\ f_{xy}(x,y) &= -2\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 24y^2 - 2\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi nulla si può dire sulla natura di $(0,0)$. Inoltre $H_f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ e quindi $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ sono punti di minimo locale.

In realtà, $(0,0)$ è un punto di sella, come si può vedere considerando $f(x,x) = 4x^4 - 4x^2 + 2 < 2 = f(0,0)$, se $|x| < 1$, $x \neq 0$, e $f(x,-x) = 4x^4 + 2 > 2 = f(0,0)$, se $x \neq 0$.

(4) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} f_x(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ f_y(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$ che fornisce il punto $(0,0)$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)}\,, \\ f_{xy}(x,y) &= 4xye^{-(x^2+y^2)}\,, \\ f_{yy}(x,y) &= -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)}\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di massimo locale.

(5) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x-y)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ f_y(x,y) = -e^{-(x^2+y^2)} - 2y(x-y)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 2x^2 + 2xy = 0 \\ 1 - 2y^2 + 2xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - 2x^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ 1 - 2x^2 + 2xy = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = -x \\ 1 - 2x^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -2xe^{-(x^2+y^2)} - (4x-2y)e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2(x-y)e^{-(x^2+y^2)}\,, \\ f_{xy}(x,y) &= -2ye^{-(x^2+y^2)} + 2xe^{-(x^2+y^2)} + 4xy(x-y)e^{-(x^2+y^2)}\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 2ye^{-(x^2+y^2)} - (2x-4y)e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2(x-y)e^{-(x^2+y^2)}\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e quindi $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ è un punto di massimo locale, mentre $H_f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e quindi $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un punto di minimo locale.

(6) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = (2x+y)e^{x+2y} + (x^2+xy+y^2)e^{x+2y} = 0 \\ f_y(x,y) = (x+2y)e^{x+2y} + 2(x^2+xy+y^2)e^{x+2y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 2x + y = 0 \\ 2(x^2+xy+y^2) + x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x = 0 \\ x^2 + xy + y^2 + 2x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + y = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0,0)$ e $(0,-1)$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2(2x+y)e^{x+2y} + 2e^{x+2y} + (x^2+xy+y^2)e^{x+2y}\,, \\ f_{xy}(x,y) &= 2(2x+y)e^{x+2y} + e^{x+2y} + (x+2y)e^{x+2y} + 2(x^2+xy+y^2)e^{x+2y}\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 4(x+2y)e^{x+2y} + 2e^{x+2y} + 4(x^2+xy+y^2)e^{x+2y}\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo locale, mentre $H_f(0,-1) = \frac{1}{e^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,-1)$ è un punto di sella.

(7) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = (2x+y)e^{x+y} + (x^2+xy+2y^2)e^{x+y} = 0 \\ f_y(x,y) = (x+4y)e^{x+y} + (x^2+xy+2y^2)e^{x+y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+xy+2y^2+2x+y=0 \\ x^2+xy+2y^2+x+4y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-3y=0 \\ x^2+xy+2y^2+2x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3y \\ 14y^2+7y=0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0,0)$ e $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2(2x+y)e^{x+y} + 2e^{x+y} + (x^2+xy+2y^2)e^{x+y}\,, \\ f_{xy}(x,y) &= (2x+y)e^{x+y} + e^{x+y} + (x+4y)e^{x+y} + (x^2+xy+2y^2)e^{x+y}\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 2(x+4y)e^{x+y} + 4e^{x+y} + (x^2+xy+2y^2)e^{x+y}\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo locale, mentre $H_f(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2e^2}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ è un punto di sella.

(8) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = \frac{y(1+x^2+y^2)-2x^2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{y-x^2y+y^3}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ f_y(x,y) & \frac{x-xy^2+x^3}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1-x^2+y^2)=0 \\ x(1-y^2+x^2)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y=0 \\ 1-y^2+x^2=0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 1-x^2+y^2=0 \\ x=0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 1-x^2+y^2=0 \\ 1-y^2+x^2 \end{cases}$$

che fornisce il punto $(0,0)$ [gli altri tre sistemi sono assurdi]. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{-2xy(1+x^2+y^2)^2 - 4x(1+x^2+y^2)(y-x^2y+y^3)}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{-6xy+2x^3y-6xy^3}{(1+x^2+y^2)^3}\,, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{(1-x^2+3y^2)(1+x^2+y^2)^2 - 4y(1+x^2+y^2)(y-x^2y+y^3)}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{1-x^4+6x^2y^2-y^4}{(1+x^2+y^2)^3}\,, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{-6xy+2xy^3-6x^3y}{(1+x^2+y^2)^3}\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di sella.

(9) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = 4xy + 2y^2 - 2xy^2 - 4y = -2y(x-1)(y-2) = 0 \\ f_y(x,y) & = 2x^2 + 4xy - 2x^2y - 4x = -2x(x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$, $(2,0)$, $(1,1)$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 4y - 2y^2\,, \\ f_{xy}(x,y) &= 4x + 4y - 4xy - 4\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 4x - 2x^2\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di sella; $H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,2)$ è un punto di sella; $H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(2,2)$ è un punto di sella; $H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(2,0)$ è un punto di sella; infine, $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e quindi $(1,1)$ è un punto di minimo assoluto.

(10) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = -\cos x \sin(2y) = 0 \\ f_y(x,y) & = -2\cos(2y)\sin x = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4})$, $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{4})$, $(0,0)$, $(0,\frac{\pi}{2})$, $(0,\pi)$, $(0,\frac{3\pi}{2})$, $(\pi,0)$, $(\pi,\frac{\pi}{2})$, (π,π), $(\pi,\frac{3\pi}{2})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \sin x \sin(2y)\,, \\ f_{xy}(x,y) &= -2\cos x \cos(2y)\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 4\sin x \sin(2y)\,, \end{aligned}$$

si ha:
$H_f(-\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4}) = H_f(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}) = H_f(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, e quindi $(-\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ sono punti di massimo relativo;
$H_f(\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4}) = H_f(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}) = H_f(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, e quindi $(\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ sono punti di minimo relativo;
$H_f(0,0) = H_f(0,\pi) = H_f(\pi, \pm\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi, \pm\frac{\pi}{2})$ sono punti di sella;
$H_f(0, \pm\frac{\pi}{2}) = H_f(\pi, 0) = H_f(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi $(0, \pm\frac{\pi}{2})$, $(\pi,0)$, (π,π) sono punti di sella.

(11) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$ che non fornisce nessun punto. Osserviamo che, poiché $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$, ne segue che $(0,0)$ è un punto di minimo (assoluto).

(12) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} f_x = y|y| = 0 \\ f_y = 2x|y| = 0 \end{cases}$ e quindi sono $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$. Poiché $f(t,0) = f(0,t) = 0$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, mentre f è positiva nel primo e terzo quadrante aperti, mentre è negativa nel secondo e quarto quadrante aperti, ne segue che ogni suo punto stazionario è di sella.

□

Svolgimento esercizio 6

(1) Introduciamo $F(x,y) = x(x^2+y^2) - 2y^2$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(1,1) = 0$ e $F_x(x,y) = 3x^2 + y^2$, $F_y(x,y) = 2xy - 4y$ e quindi $F_y(1,1) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1) = 1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, che, calcolata in $x = 1$, fornisce $F_x(1,1) + F_y(1,1)f'(1) = 0$, da cui segue $f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = 2$.
L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 1$ è data da $y = 1 + f'(1)(x-1) = 2x - 1$.

(2) Introduciamo $F(x,y) = y \sin x + xe^y - 2$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(2,0) = 0$ e $F_x(x,y) = y\cos x + e^y$, $F_y(x,y) = \sin x + xe^y$ e quindi $F_y(2,0) = \sin 2 + 2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(2) = 0$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, che, calcolata in $x = 2$, fornisce $F_x(2,0) + F_y(2,0)f'(2) = 0$, da cui segue $f'(2) = -\frac{F_x(2,0)}{F_y(2,0)} = -\frac{1}{2+\sin 2}$.
L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 2$ è data da $y = f'(2)(x-2) = \frac{2-x}{2+\sin 2}$.

(3) Introduciamo $F(x,y) = xe^y + y\sin(x-1) - 2x - 4y + 1$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(1,0) = 0$ e $F_x(x,y) = e^y + y\cos(x-1) - 2$, $F_y(x,y) = xe^y + \sin(x-1) - 4$ e quindi $F_y(1,0) = -3 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1) = 0$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, che, calcolata in $x = 1$, fornisce $F_x(1,0) + F_y(1,0)f'(1) = 0$, da cui segue $f'(1) = -\frac{F_x(1,0)}{F_y(1,0)} = -\frac{1}{3}$.
L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 1$ è data da $y = f'(1)(x-1) = -\frac{1}{3}(x-1)$.

(4) Introduciamo $F(x,y) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + e^{xy-1} - 2$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0$, e osserviamo che $F(-1,-1) = 0$ e $F_x(x,y) = \frac{4}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} + ye^{xy-1}$, $F_y(x,y) = -\frac{4}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2} + xe^{xy-1}$ e quindi $F_y(-1,-1) = -3 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(-1) = -1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, che, calcolata in $x = -1$, fornisce $F_x(-1,-1) + F_y(-1,-1)f'(-1) = 0$, da cui segue $f'(-1) = -\frac{F_x(-1,-1)}{F_y(-1,-1)} = \frac{2+\pi}{2-\pi}$.
L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = -1$ è data da $y = -1 + f'(-1)(x+1) = \frac{2+\pi}{2-\pi}x + \frac{2\pi}{2-\pi}$.

(5) Introduciamo $F(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{6} - \log 2$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$, e osserviamo che $F(\sqrt{3},1) = 0$ e $F_x(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $F_y(x,y) = \frac{y-x}{x^2+y^2}$ e quindi $F_y(\sqrt{3},1) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(\sqrt{3}) = 1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, che, calcolata in $x = \sqrt{3}$, fornisce $F_x(\sqrt{3},1) + F_y(\sqrt{3},1)f'(\sqrt{3}) = 0$, da cui segue $f'(\sqrt{3}) = -\frac{F_x(\sqrt{3},1)}{F_y(\sqrt{3},1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$.
L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = \sqrt{3}$ è data da $y = 1 + f'(\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})x - 2(\sqrt{3}+1)$.

$\square$

Svolgimento esercizio 7

(1) Introduciamo $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+1$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e osserviamo che $F(3,-1,1) = 0$ e $F_x(x,y,z) = 2x-2$, $F_y(x,y,z) = 2y+2$, e $F_z(x,y,z) = 2z-4$ e quindi $F_z(3,-1,1) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (x_0,y_0), un intorno V di z_0, e un'unica funzione $z = f(x,y) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(3,-1) = 1$ e $F(x,y,f(x,y)) = 0$, per ogni $(x,y) \in U$.

Derivando quest'ultima rispetto ad x e y, si ottiene $\begin{cases} F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_x(x,y) = 0, \\ F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_y(x,y) = 0, \end{cases}$

che, calcolate in $(x,y) = (3,-1)$, forniscono $\begin{cases} F_x(3,-1,1) + F_z(3,-1,1)f_x(3,-1) = 0, \\ F_y(3,-1,1) + F_z(3,-1,1)f_y(3,-1) = 0, \end{cases}$

da cui segue $f_x(3,-1) = -\frac{F_x(3,-1,1)}{F_z(3,-1,1)} = 2$, $f_y(3,-1) = -\frac{F_y(3,-1,1)}{F_z(3,-1,1)} = 0$.

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0,y_0) = (3,-1)$ è data da $z = f(3,-1) + f_x(3,-1)(x-3) + f_y(3,-1)(y+1) = 2x-5$.

(2) Introduciamo $F(x,y,z) = xyz-6$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e osserviamo che $F(1,-2,-3) = 0$ e $F_x(x,y,z) = 2x-2$, $F_y(x,y,z) = 2y+2$, e $F_z(x,y,z) = 2z-4$ e quindi $F_z(1,-2,-3) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (x_0,y_0), un intorno V di z_0, e un'unica funzione $z = f(x,y) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1,-2) = -3$ e $F(x,y,f(x,y)) = 0$, per ogni $(x,y) \in U$.

Derivando quest'ultima rispetto ad x e y, si ottiene $\begin{cases} F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_x(x,y) = 0, \\ F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_y(x,y) = 0, \end{cases}$

che, calcolate in $(x,y) = (1,-2)$, forniscono $\begin{cases} F_x(1,-2,-3) + F_z(1,-2,-3)f_x(1,-2) = 0, \\ F_y(1,-2,-3) + F_z(1,-2,-3)f_y(1,-2) = 0, \end{cases}$

da cui segue $f_x(3,-1) = -\frac{F_x(1,-2,-3)}{F_z(1,-2,-3)} = 3$, $f_y(3,-1) = -\frac{F_y(1,-2,-3)}{F_z(1,-2,-3)} = -\frac{3}{2}$.

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0,y_0) = (1,-2)$ è data da $z = f(1,-2) + f_x(1,-2)(x-1) + f_y(1,-2)(y+2) = 3x - \frac{3}{2}y - 9$.

(3) Introduciamo $F(x,y,z) = xy+yz+zx-3$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e osserviamo che $F(1,1,1) = 0$ e $F_x(x,y,z) = y+z$, $F_y(x,y,z) = x+z$, e $F_z(x,y,z) = y+x$ e quindi $F_z(1,1,1) = 2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (x_0,y_0), un intorno V di z_0, e un'unica funzione $z = f(x,y) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1,1) = 1$ e $F(x,y,f(x,y)) = 0$, per ogni $(x,y) \in U$.

Derivando quest'ultima rispetto ad x e y, si ottiene $\begin{cases} F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_x(x,y) = 0, \\ F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_y(x,y) = 0, \end{cases}$

che, calcolate in $(x,y) = (1,1)$, forniscono $\begin{cases} F_x(1,1,1) + F_z(1,1,1)f_x(1,1) = 0, \\ F_y(1,1,1) + F_z(1,1,1)f_y(1,1) = 0, \end{cases}$

da cui segue $f_x(1,1) = -\frac{F_x(1,1,1)}{F_z(1,1,1)} = -1$, $f_y(1,1) = -\frac{F_y(1,1,1)}{F_z(1,1,1)} = -1$.

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0,y_0) = (1,1)$ è data da $z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) = 3-x-y$.

(4) Introduciamo $F(x,y,z) = \int_1^z \sin(x^2t^2)\,dt + x^2y + y^2 - z^2$. Poiché $F(0,1,1) = 0$ e $F_z(0,1,1) = \sin(x^2z^2) - 2z\big|_{(0,1,1)} = -2 \neq 0$, per il teorema della funzione implicita, esistono un intorno U di (x_0,y_0), un intorno V di z_0, e un'unica funzione $z = f(x,y) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa

$f(0,1) = 1$, e $F(x, y, f(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in U$, cioè

$$\int_1^{f(x,y)} \sin(x^2t^2)\, dt + x^2y + y^2 - f(x, y)^2 = 0.$$

Le derivate parziali prime sono

$$\begin{cases} \sin\left(x^2 f(x,y)^2\right) f_x(x,y) + \int_1^{f(x,y)} 2x\cos(x^2t^2)\, dt + 2xy - 2f(x,y)f_x(x,y) = 0, \\ \sin\left(x^2 f(x,y)^2\right) f_y(x,y) + x^2 + 2y - 2f(x,y)f_y(x,y) = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $(0, 1)$, forniscono

$$\begin{cases} -2f_x(0,1) = 0 \implies f_x(0,1) = 0, \\ 2 - 2f_y(0,1) = 0 \implies f_y(0,1) = 1. \end{cases}$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0) = (0, 1)$ è data da $z = f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1) = y$.

□

Svolgimento esercizio 8

(1) Poniamo

$$\begin{cases} F(t, x, y) = t^2 + x^2 + y^2 - 2 \\ G(t, x, y) = tx + ty^2 - t^2, \end{cases}$$

e osserviamo che $F(1, 0, 1) = G(1, 0, 1) = 0$, e

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(t, x, y) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ t & 2ty \end{vmatrix} = 4txy - 2ty,$$

per cui $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(1, 0, 1) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di t_0, un intorno V di (x_0, y_0), e un'unica funzione $f(t) = (x(t), y(t)) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(1) = 0$, $y(1) = 1$ e

$$\begin{cases} t^2 + x(t)^2 + y(t)^2 - 2 = 0, \\ tx(t) + ty(t)^2 - t^2 = 0, \end{cases}$$

per ogni $t \in U$. Derivando queste equazioni rispetto a t si ottiene

$$\begin{cases} 2t + 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0, \\ x(t) + tx'(t) + y(t)^2 + 2ty'(t)y(t) - 2t = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $t = 1$, forniscono

$$\begin{cases} 2 + 2y'(1) = 0 \\ x'(1) + 2y'(1) - 1 = 0, \end{cases}$$

da cui segue $x'(1) = 3$, $y'(1) = -1$.

(2) Poniamo

$$\begin{cases} F(t,x,y,z) = t + x + 2y + 3z - 3 \\ G(t,x,y,z) = t^2 + x^2 - 2y^2 + z^2 + 1 \\ H(t,x,y,z) = t^3 + x^3 - y^3 + z^3, \end{cases}$$

e osserviamo che $F(0,1,1,0) = G(0,1,1,0) = H(0,1,1,0) = 0$, e

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(t,x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -4y & 2z \\ 3x^2 & -3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix},$$

per cui $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(0,1,1,0) = 18 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di t_0, un intorno V di (x_0, y_0, z_0), e un'unica funzione $f(t) = (x(t), y(t), z(t)) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, e

$$\begin{cases} t + x(t) + 2y(t) + 3z(t) - 3 = 0, \\ t^2 + x(t)^2 - 2y(t)^2 + z(t)^2 + 1 = 0, \\ t^3 + x(t)^3 - y(t)^3 + z(t)^3 = 0, \end{cases}$$

per ogni $t \in U$. Derivando queste equazioni rispetto a t si ottiene

$$\begin{cases} 1 + x'(t) + 2y'(t) + 3z'(t) = 0, \\ 2t + 2x(t)x'(t) - 4y(t)y'(t) + 2z(t)z'(t) = 0, \\ 3t^2 + 3x(t)^2x'(t) - 3y(t)^2y'(t) + 3z(t)^2z'(t) = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $t = 0$, forniscono

$$\begin{cases} 1 + x'(0) + 2y'(0) + 3z'(0) = 0, \\ 2x'(t) - 4y'(t) = 0, \\ 3x'(t) - 3y'(t) = 0, \end{cases}$$

da cui segue $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $z'(0) = -\frac{1}{3}$.

(3) Introduciamo $F(u,v,x,y) = x^2+uy^2-v$, $G(u,v,x,y) = xy+2y^2-uv-3$, per ogni $(u,v,x,y) \in \mathbb{R}^4$, e osserviamo che

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(u,v,x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 2uy \\ y & x + 4y \end{vmatrix} = 2x^2 + 8xy - 2uy^2,$$

e quindi $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(0,1,1,1) = 10 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (u_0, v_0), un intorno V di (x_0, y_0), e un'unica funzione $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(0,1) = 1$, $y(0,1) = 1$ e

$$\begin{cases} x(u,v)^2 + uy(u,v)^2 - v = 0 \\ x(u,v)y(u,v) + 2y(u,v)^2 - uv - 3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

per ogni $(u,v) \in U$.

Inoltre, derivando le equazioni $(*)$ rispetto ad u e sostituendo $(u,v)=(0,1)$, si ottiene

$$\begin{cases} 0 &= 2x(u,v)x_u(u,v)+y(u,v)^2+2uy(u,v)y_u(u,v)\big|_{(0,1)} = 2x_u(0,1)+1, \\ 0 &= x_u(u,v)y(u,v)+x(u,v)y_u(u,v)+2y(u,v)y_u(u,v)-v\big|_{(0,1)} = x_u(0,1)+3y_u(0,1)-1, \end{cases}$$

per cui $x_u(0,1)=-\frac{1}{2}$, $y_u(0,1)=\frac{1}{2}$. Analogamente, derivando le equazioni $(*)$ rispetto a v e sostituendo $(u,v)=(0,1)$, si ottiene

$$\begin{cases} 0 &= 2x(u,v)x_v(u,v)+2vy(u,v)y_v(u,v)-1\big|_{(0,1)} = 2x_v(0,1)+2y_v(0,1)-1, \\ 0 &= x_v(u,v)y(u,v)+x(u,v)y_v(u,v)+2y(u,v)y_v(u,v)-u\big|_{(0,1)} = x_v(0,1)+3y_v(0,1), \end{cases}$$

per cui $x_v(0,1)=\frac{3}{4}$, $y_v(0,1)=-\frac{1}{4}$.

(4) Introduciamo $F(u,v,x,y,z)=x^3+xy-2uz^2-1$, $G(u,v,x,y,z)=y^2-uyz-z^2+v+1$, $H(u,v,x,y,z)=vx^2+xz-z^2+uv$, per ogni $(u,v,x,y,z)\in\mathbb{R}^5$, e osserviamo che

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(u,v,x,y,z)=\begin{vmatrix} 3x^2+y & x & -4uz \\ 0 & 2y-uz & -uy-2z \\ 2vx+z & 0 & x-2z \end{vmatrix},$$

e quindi $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(0,0,1,0,1)=-2\neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (u_0,v_0), un intorno V di (x_0,y_0,z_0), e un'unica funzione $f(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)):U\to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(0,0)=1$, $y(0,0)=0$, $z(0,0)=1$ e

$$\begin{cases} x(u,v)^3+x(u,v)y(u,v)-2uz(u,v)^2-1=0 \\ y(u,v)^2-uy(u,v)z(u,v)-z(u,v)^2+v+1=0 \\ vx(u,v)^2+x(u,v)z(u,v)-z(u,v)^2+uv=0 \end{cases} \qquad (*)$$

per ogni $(u,v)\in U$. Inoltre, derivando le equazioni $(*)$ rispetto ad u e sostituendo $u=v=0$, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= 3x(u,v)^2x_u(u,v)+x_u(u,v)y(u,v)+x(u,v)y_u(u,v)-2z(u,v)^2-2uz(u,v)z_u(u,v)\big|_{(0,0)} \\ &= 3x_u(0,0)+y_u(0,0)-2, \\ 0 &= 2y(u,v)y_u(u,v)-y(u,v)z(u,v)-uy_u(u,v)z(u,v)-uy(u,v)z_u(u,v)-2z(u,v)z_u(u,v)\big|_{(0,0)} \\ &= -2z_u(0,0), \\ 0 &= 2vx(u,v)x_u(u,v)+x_u(u,v)z(u,v)+x(u,v)z_u(u,v)-2z(u,v)z_u(u,v)+v\big|_{(0,0)} \\ &= 2x_u(0,0)-z_u(0,0), \end{aligned}$$

per cui $x_u(0,0)=0$, $y_u(0,0)=2$, $z_u(0,0)=0$. Analogamente, derivando le equazioni $(*)$ rispetto a v e sostituendo $u=v=0$, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= 3x(u,v)^2x_v(u,v)+x_v(u,v)y(u,v)+x(u,v)y_v(u,v)-2uz(u,v)z_v(u,v)\big|_{(0,0)} \\ &= 3x_v(0,0)+y_v(0,0), \\ 0 &= 2y(u,v)y_v(u,v)-uy_v(u,v)z(u,v)-uy(u,v)z_v(u,v)-2z(u,v)z_v(u,v)+1\big|_{(0,0)} \\ &= -2z_v(0,0)+1, \\ 0 &= x(u,v)^2+2vx(u,v)x_v(u,v)+x_v(u,v)z(u,v)+x(u,v)z_v(u,v)-2z(u,v)z_v(u,v)+u\big|_{(0,0)} \\ &= 1+x_v(0,0)-z_v(0,0), \end{aligned}$$

per cui $x_v(0,0) = -\frac{1}{2}$, $y_v(0,0) = \frac{3}{2}$, $z_v(0,0) = \frac{1}{2}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 9

(1) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 1] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) & = 2x = 0 \\ g_y(x,y) & = 2y = 0 \\ g(x,y) & = x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

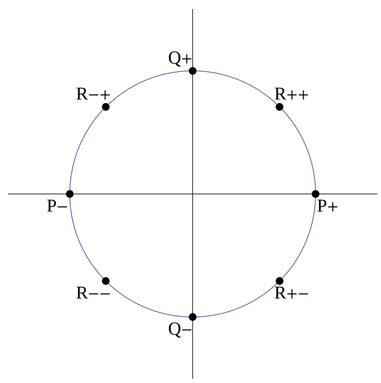

Figura 1: Dominio per l'esercizio 9 (1)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) & = 4x^3 + 2x\lambda = 2x(2x^2 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) & = 4y^3 + 2y\lambda = 2y(2y^2 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) & = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 + \lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\bigvee \begin{cases} 2x^2 + \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2x^2 + \lambda = 0 & (*) \\ 2y^2 + \lambda = 0 & (**) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema è assurdo; nel quarto sistema sottraiamo l'equazione $(**)$ dall'equazione $(*)$, ottenendo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

cioè i punti $P_\pm = (0, \pm 1)$, $Q_\pm = (\pm 1, 0)$, e i quattro punti $R_{\pm,\pm} = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P_\pm) = f(Q_\pm) = 1$ e $f(R_{\pm,\pm}) = \frac{1}{2}$. Quindi $\min_D f = \frac{1}{2}$ e $\max_D f = 1$.

(2) Poiché $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{2}\big(- x \pm \sqrt{4 - 3x^2}\big)$, D è l'unione dei grafici di due funzioni continue di x su $[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$, e quindi D è chiuso e limitato [vedi figura 2]. Poiché f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) & = 2x + y = 0 \\ g_y(x, y) & = 2y + x = 0 \\ g(x, y) & = x^2 + y^2 + xy - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

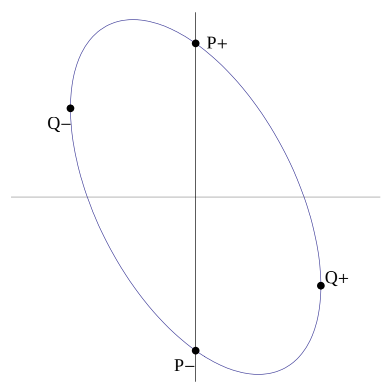

Figura 2: Dominio per l'esercizio 9 (2)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) & = y + \lambda(2x + y) = 2\lambda x + (\lambda + 1)y = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) & = x + 2y + \lambda(2y + x) = (\lambda + 1)(x + 2y) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) & = x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = -2y \\ (1 - 3\lambda)y = 0 \\ 3y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce i punti $P_\pm = (0, \pm 1)$; il secondo i punti $Q_\pm = (\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}})$.
Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P_\pm) = 1$ e $f(Q_\pm) = -\frac{1}{3}$. Quindi $\min_D f = -\frac{1}{3}$ e $\max_D f = 1$.

(3) Poiché $x^2 + y^4 - y = 0 \iff x = \pm\sqrt{y - y^4}$, D è l'unione dei grafici di due funzioni continue di y su $[0, 1]$, e quindi D è chiuso e limitato [vedi figura 3]. Poiché f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^4 - y$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) &= 2x = 0 \\ g_y(x,y) &= 4y^3 - 1 = 0 \\ g(x,y) &= x^2 + y^4 - y = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

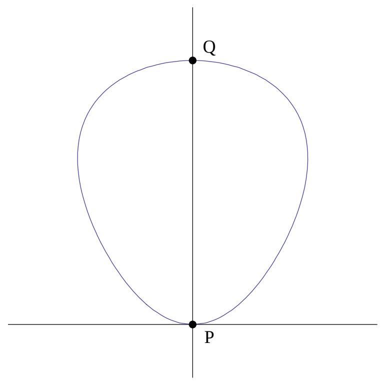

Figura 3: Dominio per l'esercizio 9 (3)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= 2y + \lambda(4y^3 - 1) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^4 - y = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ 2y + \lambda(4y^3 - 1) = 0 \\ y(y^3 - 1) = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce il punto $P = (0, 0)$; il secondo fornisce i punti P, e $Q = (0, 1)$.
Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P) = 0$ e $f(Q) = 1$. Quindi $\min_D f = 0$ e $\max_D f = 1$.

(4) Poiché $x^4 + y^4 - 1 = 0 \iff y = \pm\sqrt[4]{1-x^4}$, D è l'unione dei grafici di due funzioni continue di x su $[-1, 1]$, e quindi D è chiuso e limitato [vedi figura 4]. Poiché f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) &= 4x^3 = 0 \\ g_y(x,y) &= 4y^3 = 0 \\ g(x,y) &= x^4 + y^4 - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

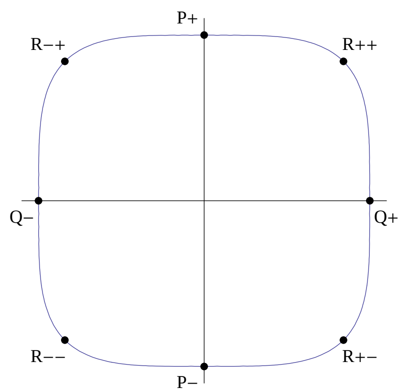

Figura 4: Dominio per l'esercizio 9 (4)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + 4\lambda x^3 = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\big(2\lambda x^2(x^2+y^2) - 1\big) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + 4\lambda y^3 = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\big(2\lambda y^2(x^2+y^2) - 1\big) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ 2\lambda y^2(x^2+y^2) - 1 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$$\bigvee \begin{cases} 2\lambda x^2(x^2+y^2) - 1 = 0 \\ y = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2\lambda x^2(x^2+y^2) - 1 = 0 & (*) \\ 2\lambda y^2(x^2+y^2) - 1 = 0 & (**) \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

Il primo sistema è assurdo; il secondo fornisce i punti $P_\pm = (0, \pm 1)$; il terzo i punti $Q_\pm = (\pm 1, 0)$. Dal quarto, sottraendo l'equazione $(**)$ da $(*)$, e osservando che deve essere $\lambda \neq 0$, si ottiene $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^4 + y^4 = 1, \end{cases}$ che fornisce i quattro punti $R_{\pm,\pm} = (\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$.

Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P_\pm) = f(Q_\pm) = 1$ e $f(R_{\pm,\pm}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi $\min_D f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\max_D f = 1$.

(5) Poiché $xy = 1 \iff y = \frac{1}{x}$, D è il grafico della funzione continua $x \in (0, +\infty) \to \frac{1}{x} \in (0, +\infty)$, e quindi D è chiuso ma non limitato [vedi figura 5], e quindi, anche se f è continua su D, non si può applicare il teorema di Weierstrass, per cui nessuno ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Ma osserviamo che f su D si può scrivere $g(x) := f(x, \frac{1}{x}) = \exp\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)$, $x \in (0, +\infty)$. Questa

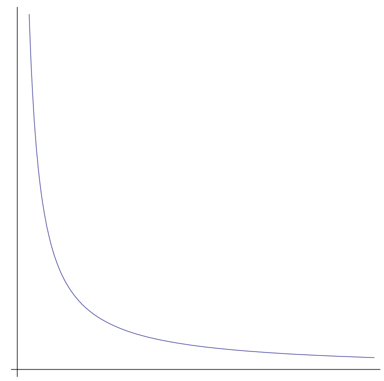

Figura 5: Dominio per l'esercizio 9 (5)

funzione ha $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$, e $g'(x) = \frac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2} \exp\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right) \geq 0 \iff x \in (0, 1]$, per cui g è crescente in $(0, 1]$, e decrescente in $[1, +\infty)$, e quindi ha massimo assoluto in $x = 1$. Quindi $\min_D f = \nexists$, $\inf_D f = 1$, e $\max_D f = f(1, 1) = \sqrt{e}$.

□

Svolgimento esercizio 10

(1) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 6] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

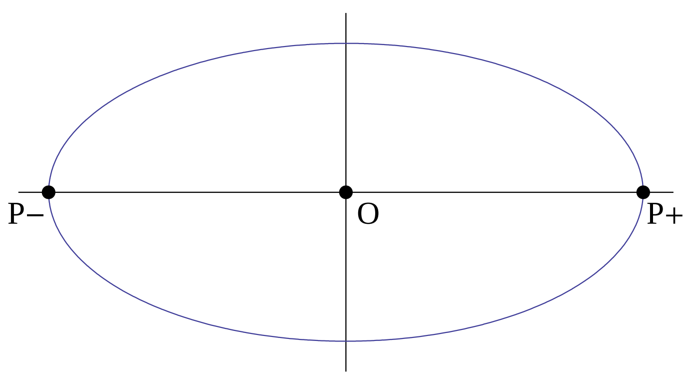

Figura 6: Dominio per l'esercizio 10 (1)

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 2y^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 4xy - 2y = 2y(2x-1) = 0, \end{cases}$$

che fornisce il punto $O = (0, 0)$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$].

Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 2x = 0 \\ g_y(x,y) = 8y = 0 \\ g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) & = 3x^2 + 2y^2 + 2x\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) & = 4xy - 2y + 8y\lambda = 2y(2x - 1 + 4\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) & = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

che implica

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \bigvee \begin{cases} 2x - 1 + 4\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{1}{4}(1 - 2x) \\ 3x^2 + 7y^2 + \frac{1}{2}x(1-2x) = \frac{1}{2}(4x^2 + 4y^2 + x) = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce i punti $P_\pm = (\pm 2, 0)$, mentre il secondo implica

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + x = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + x + 4 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(O) = 3$, $f(P_+) = 11$, $f(P_-) = -5$. Quindi $\min_D f = -5$ e $\max_D f = 11$.

(2) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 7] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

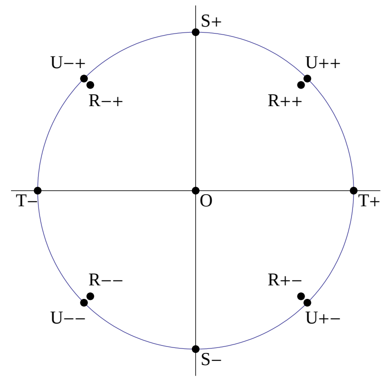

Figura 7: Dominio per l'esercizio 10 (2)

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x,y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 + 12xy^2 - 64x = 4x(x^2 + 3y^2 - 16) = 0 \\ f_y(x,y) = 12x^2y + 4y^3 - 64y = 4y(3x^2 + y^2 - 16) = 0, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\bigvee \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 16 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 16 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 16 = 0, \end{cases}$$

che forniscono i punti $O = (0,0)$, $P_\pm = (0, \pm 4)$, $Q_\pm = (\pm 4, 0)$, $R_{\pm,\pm} = (\pm 2, \pm 2)$, dei quali solo O e $R_{\pm,\pm}$ sono interni a D.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$].

Introduciamo la funzione di vincolo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 2x = 0 \\ g_y(x,y) = 2y = 0 \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) & = 4x^3 + 12xy^2 - 64x + 2x\lambda = 2x(2x^2 + 6y^2 - 32 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) & = 12x^2y + 4y^3 - 64y + 2y\lambda = 2y(6x^2 + 2y^2 - 32 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) & = x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ 6x^2 + 2y^2 - 32 + \lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$
$$\bigvee \begin{cases} 2x^2 + 6y^2 - 32 + \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2x^2 + 6y^2 - 32 + \lambda = 0 (*) \\ 6x^2 + 2y^2 - 32 + \lambda = 0 (**) \\ x^2 + y^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema è assurdo; il secondo fornisce i punti $S_\pm = (0, \pm 3)$; il terzo fornisce i punti $T_\pm = (\pm 3, 0)$. Il quarto sistema, dopo aver sottratto l'equazione $(**)$ da $(*)$, implica

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

che fornisce i quattro punti $U_{\pm,\pm} = \big(\pm \frac{3}{\sqrt{2}}, \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \big)$.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(O) = 0$, $f(R_{\pm,\pm}) = -128$, $f(S_\pm) = f(T_\pm) = -207$, $f(U_{\pm,\pm}) = -126$. Quindi $\min_D f = -207$ e $\max_D f = 0$.

(3) Poiché D è chiuso e limitato [perché è una corona circolare] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} = 0 \\ f_y(x, y) = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = 0, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$
$$\bigvee \begin{cases} y^2 - 3x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y^2 - 3x^2 = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 0. \end{cases}$$

I quattro sistemi forniscono il solo punto $O = (0, 0) \notin D^o$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Poiché $\mathcal{F}D$ è l'unione di due circonferenze, possiamo parametrizzarle ponendo $\begin{cases} x = r \cos\vartheta, \\ y = r \sin\vartheta, \end{cases}$ $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $r \in \{1, 2\}$. Otteniamo così le funzioni $g_1(\vartheta) := f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = 2\cos\vartheta \sin\vartheta = \sin 2\vartheta$, e $g_2(\vartheta) := f(2\cos\vartheta, 2\sin\vartheta) = \frac{1}{2}\cos\vartheta \sin\vartheta = \frac{1}{4}\sin 2\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Allora, $\min g_1 = -1$, $\max g_1 = 1$, $\min g_2 = -\frac{1}{4}$, $\max g_2 = \frac{1}{4}$.

(d) Quindi, $\min_D f = -1$, $\max_D f = 1$.

(4) Poiché D è chiuso e limitato [perché è un quadrato] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2(x+1)e^{(x+1)^2+(y-1)^2} = 0 \\ f_y(x,y) = 2(y-1)e^{(x+1)^2+(y-1)^2} = 0, \end{cases}$$

che fornisce il punto $(-1, 1) \notin D^o$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Parametrizziamo, separatamente, i quattro segmenti di retta che compongono $\mathcal{F}D$, indicando con $V_1 = (1, 1)$, $V_2 = (0, 1)$, $V_3 = (0, 0)$, $V_4 = (1, 0)$ i vertici del quadrato D.

Il segmento V_1V_2 ha equazioni parametriche $x = t, y = 1$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_1(t) = f(t, 1) = e^{(t+1)^2}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_1'(t) = 2(t+1)e^{(t+1)^2} = 0 \iff t = -1$, si ottengono i punti V_1, V_2.

Il segmento V_2V_3 ha equazioni parametriche $x = 0, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_2(t) = f(0, t) = e^{t^2-2t+2}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_2'(t) = 2(t-1)e^{t^2-2t+2} = 0 \iff t = 1$, si ottengono i punti V_2, V_3.

Il segmento V_3V_4 ha equazioni parametriche $x = t, y = 0$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_3(t) = f(t, 0) = e^{t^2+2t+2}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_3'(t) = 2(t+1)e^{t^2+2t+2} = 0 \iff t = -1$, si ottengono i punti V_3, V_4.

Il segmento V_1V_4 ha equazioni parametriche $x = 1, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_4(t) = f(1, t) = e^{t^2-2t+5}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_4'(t) = 2(t-1)e^{t^2-2t+5} = 0 \iff t = 0$, si ottengono i punti V_1, V_4.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = e^4$, $f(V_2) = e$, $f(V_3) = e^2$, $f(V_4) = e^5$. Quindi $\min_D f = e$, e $\max_D f = e^5$.

(5) Poiché D è chiuso e limitato [perché è un triangolo] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 96x^3 - 2(x-y) = 0 \\ f_y(x,y) = 12y^3 - 2(y-x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 96x^3 + 12y^3 = 0 \\ 12y^3 - 2y + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ -48x^3 + 6x = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0, 0) \notin D^o$, e $\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \notin D^o$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Parametrizziamo, separatamente, i tre segmenti di retta che compongono $\mathcal{F}D$, indicando con $V_1 = (1, 1)$, $V_2 = (0, 1)$, $V_3 = (0, 0)$ i vertici del triangolo D.

Il segmento V_1V_2 ha equazioni parametriche $x = t, y = 1$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_1(t) = f(t, 1) = 24t^4 - t^2 + 2t + 2$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_1'(t) = 96t^3 - 2t + 2 = 96t^3 + 2(1-t) \geq 0$, per ogni $t \in [0, 1]$, si ottengono i punti V_1, V_2.

Il segmento V_2V_3 ha equazioni parametriche $x = 0, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_2(t) = f(0, t) = 3t^4 - t^2$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_2'(t) = 12t^3 - 2t = 0 \iff t = 0 \vee t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, si ottengono i punti V_2, V_3, e $P = \left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Il segmento V_3V_1 ha equazioni parametriche $x = t, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_3(t) = f(t, t) = 27t^4$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_3'(t) = 108t^3 = 0 \iff t = 0$, si ottengono i punti V_3, V_1.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = 27$, $f(V_2) = 2$, $f(V_3) = 0$, $f(P) = -\frac{1}{12}$. Quindi $\min_D f = -\frac{1}{12}$, e $\max_D f = 27$.

(6) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 8] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

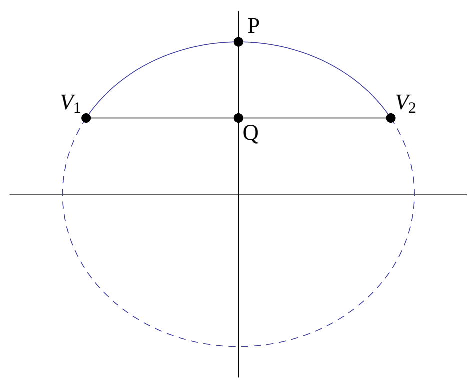

Figura 8: Dominio per l'esercizio 10 (6)

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} - x = x(2e^{x^2+y^2} - 1) = 0 \\ f_y(x,y) = 2ye^{x^2+y^2} - 2y = 2y(e^{x^2+y^2} - 1) = 0, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

L'unico sistema che ammette soluzione è il primo, che fornisce il punto $O = (0, 0) \notin D^o$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. La frontiera $\mathcal{F}D$ è unione di un arco di ellisse $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 = 4, y \geq \frac{1}{2}\}$, e del segmento di retta $\ell := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}, x \in [-1, 1]\}$, che si incontrano nei punti $V_1 = (-1, \frac{1}{2})$, e $V_2 = (1, \frac{1}{2})$. Allora, impieghiamo due metodi diversi: per trattare l'insieme E, usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_E$]; per trattare l'insieme ℓ, usiamo il metodo di parametrizzazione.

Cominciamo dall'insieme E. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 4$, $y \geq \frac{1}{2}$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 6x = 0 \\ g_y(x,y) = 8y = 0 \\ g(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) & = 2xe^{x^2+y^2} - x + 6\lambda x = x(2e^{x^2+y^2} - 1 + 6\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) & = 2ye^{x^2+y^2} - 2y + 8\lambda y = 2y(e^{x^2+y^2} - 1 + 4\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) & = 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 + 4\lambda = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bigvee \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 + 6\lambda = 0 \\ y = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 + 6\lambda = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 + 4\lambda = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il primo, il terzo e il quarto sistema sono assurdi; il secondo fornisce il punto $P = (0,1)$.

Consideriamo, ora, il segmento ℓ. Esso ha equazioni parametriche $x = t, y = \frac{1}{2}$, con $t \in [-1,1]$. Si ha $h(t) = f(t, \frac{1}{2}) = e^{t^2+1/4} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}$, per $t \in [-1,1]$. Poiché $h'(t) = 2te^{t^2+1/4} - t = t(2e^{t^2+1/4} - 1) = 0 \iff t = 0$, si ottengono i punti V_1, V_2, e $Q = (0, \frac{1}{2})$.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = f(V_2) = e - \frac{1}{2}$, $f(P) = e - 1$, $f(Q) = e^{1/4} - \frac{1}{4}$. Quindi $\min_D f = e^{1/4} - \frac{1}{4}$ e $\max_D f = e - \frac{1}{2}$.

(7) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 9] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x,y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2(x-y) = 0 \\ f_y(x,y) = 2(y-x) = 0, \end{cases}$$

che fornisce il segmento di retta $\ell := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)\} \subset D^o$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

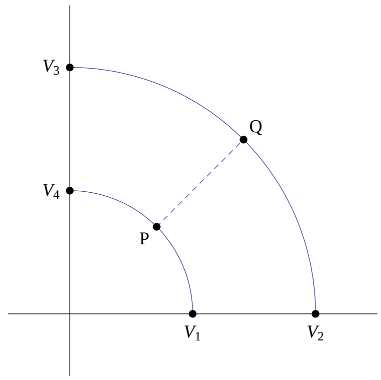

Figura 9: Dominio per l'esercizio 10 (7)

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. La frontiera $\mathcal{F}D$ è unione di due archi di circonferenza $C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ e $C_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, e di due segmenti di retta $\ell_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in [0, 1]\}$ e $\ell_y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [0, 1]\}$, che si incontrano nei punti $V_1 = (1, 0)$, $V_2 = (2, 0)$, $V_3 = (0, 2)$, $V_4 = (0, 1)$, e che dovremo considerare quali possibili punti di massimo o minimo. Allora, impieghiamo due metodi diversi: per trattare gli insiemi C_1 e C_2, usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana; per trattare gli insiemi ℓ_x e ℓ_y, usiamo il metodo di parametrizzazione.

Cominciamo dall'insieme C_1. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 2x = 0 \\ g_y(x, y) = 2y = 0 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) & = 2(x - y) + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) & = 2(y - x) + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) & = x^2 + y^2 - 1 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda + 1)x = y \\ \lambda(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y \\ x^2 = \frac{1}{2}, x \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = -x \\ (\lambda + 1)x = -x \\ x^2 = \frac{1}{2}, x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Il secondo sistema è assurdo; il primo fornisce il punto $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \overline{\ell}$.

Continuiamo con l'insieme C_2. Introduciamo la funzione di vincolo $h(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, $x \geq 0$,

$y \geq 0$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} h_x(x,y) = 2x = 0 \\ h_y(x,y) = 2y = 0 \\ h(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) & = 2(x-y) + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) & = 2(y-x) + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) & = x^2 + y^2 - 4 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda+1)x = y \\ \lambda(x+y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y \\ x^2 = 2, x \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = -x \\ (\lambda+1)x = -x \\ x^2 = 2, x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Il secondo sistema è assurdo; il primo fornisce il punto $Q = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \in \overline{\ell}$.

Consideriamo, ora, il segmento ℓ_x. Esso ha equazioni parametriche $x = t, y = 0$, con $t \in [1,2]$. Si ha $j(t) = f(t,0) = t^2$, per $t \in [1,2]$. Poiché $j'(t) = 2t = 0 \iff t = 0$, non si ottengono ulteriori punti.

Consideriamo, infine, il segmento ℓ_y. Esso ha equazioni parametriche $x = 0, y = t$, con $t \in [1,2]$. Si ha $k(t) = f(0,t) = t^2$, per $t \in [1,2]$. Poiché $k'(t) = 2t = 0 \iff t = 0$, non si ottengono ulteriori punti.

(*d*) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = f(V_4) = 1$, $f(V_2) = f(V_3) = 4$, $f|_{\overline{\ell}} = 0$. Quindi $\min_D f = 0$ e $\max_D f = 4$.

□