Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica - 1 Febbraio 2016
Soluzione della Versione A

1) Data la funzione

$$f(x,y) := 2x^3 + 3xy^2$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Trovare massimo e minimo assoluto di f nella regione $K := \{x^2 + y^2 \le 1\}$.*

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x^2 + 3y^2 \\ 6xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0 \ , \ y = 0$$

Quindi l'unico punto critito è l'origine $(0,0)$. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi l'informazione contenuta nel punto $(0,0)$ non è sufficiente a stabilire la natura del punto critico. Tuttavia $det(H_f(x,y)) = 72x^2 - 36y^2$ cambia segno in ogni intorno di $(0,0)$ quindi $f(x,y)$ non è né localmente convessa né localmente concava in ogni intorno di $(0,0)$. Per cui $(0,0)$ è necessariamente un **punto di sella**. Allo stesso risultato si arriva osservando che $f(0,0) = 0$ e che sull'asse $y = 0$ si ha $f(x,0) = x^3$; quindi $f(x,0) > 0$ per $x > 0$ e $f(x,0) < 0$ per $x < 0$.

2.) L'insieme K è chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette in K massimo e minimo assoluto. Abbiamo già osservato che f non ha max e min relativi su $\mathbb{R}^2$. Quindi studiamo la funzione f sul vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

$$f(x,y) = 2x^3 + 3xy^2 \ , \ x^2 + y^2 = 1 \quad \iff \quad h(x) = 2x^3 + 3x(1 - x^2) = -x^3 + 3x = x(-x^2 + 3)$$

dove abbiamo indicato con h la restrizione di f al vincolo. Derivando h otteniamo $h'(x) = -3x^2 + 3 = 3(-x^2 + 1)$ da cui si evince che $x = -1$ è un minimo locale e che $x = 1$ è massimo locale di h. In particolare $h(-1) = -2$ e $h(1) = 2$. Le ordinate associate a tali valori le otteniamo dall'equazione del vincolo $y^2 = 1 - x^2$:

$$P_1 = (1,0) \quad \textbf{massimo assoluto} \quad ; \quad P_2 = (-1,0) \quad \textbf{minimo assoluto} \quad .$$

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

Calcolare l'integrale di ω lungo la curva

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ e^{t^2}(t^2 - 3t + 2) \end{pmatrix} , \qquad t \in [1,2]$$

Svolgimento Si tratta una forma differenziale chiusa ma non esatta. Non ammette quindi una primitiva nel suo dominio di definizione $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Tuttavia il supporto della curva γ è contenuto nell'insieme $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ che è un aperto convesso, quindi semplicemente connesso. Quindi ogni curva β

contenuta in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ che ha lo stesso punto iniziale di γ e lo stesso punto finale di γ è omotopa in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ a γ. Essendo ω chiusa si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\beta \omega$$

Quindi per calcolare l'integrale scegliamo un'opportuna curva β. Dato che $\gamma(1) = (1, 0)$ e $\gamma(2) = (2, 0)$, prendiamo come curva β il segmento che unisce questi due punti $\beta(t) := (t, 0)$ con $t \in [1, 2]$. Si osservi che $\dot\beta(t) = (1, 0)$, quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_\beta \omega = \int_1^2 dt\, a_1(\beta(t))\dot\beta_1(t) + a_2(\beta(t))\dot\beta_2(t) = \int_1^2 dt\, a_1(\beta(t))\dot\beta_1(t) = 0$$

(dove abbiamo indicato con a_1, a_2, rispettivamente, la prima e la seconda componente di ω e con $\dot\beta_1, \dot\beta_2$ la prima e la seconda componente di $\dot\beta$) in quanto $a_1(\beta(t)) = 0$

3) Calcolare l'integrale $\int_D e^x\, dxdy$, dove $D := \{-2x + 1 \le y \le -2x + 4\ ,\ 1 + y \le x \le y + 3\}$.

Svolgimento L'insieme di integrazione è un parallelogramma. Conviene eseguire un cambio di variabili: si osservi infatti che

$$-2x + 1 \le y \le -2x + 4 \iff 1 \le y + 2x \le 4 \qquad 1 + y \le x \le y + 3 \iff 1 \le x - y \le 3$$

Ponendo $u := y + 2x$ e $v := x - y$ il dominio di integrazione diventa, nelle nuove variabili, un rettangolo $D = \{1 \le u \le 4\ ,\ 1 \le v \le 3\}$. Calcoliamo la matrice Jacobiana J della trasformazione:

$$x = \frac{u+v}{3} \quad , \quad y = \frac{u-2v}{3} \quad \Rightarrow \quad J(u,v) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \ ,\ |det(J(u,v))| = 1/3$$

Quindi

$$\int_D e^x\, dxdy = \int_1^4 du \int_1^3 dv\ ,\ \frac{e^{(u+v)/3}}{3} = \frac{1}{3}\int_1^4 du\, e^{u/3} \int_1^3 dv\, e^{v/3} = 3(e^{4/3} - e^{1/3})(e - e^{1/3})$$

4) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^6 + y, y^2 + z, 1)$ attraverso la surperficie di equazione $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ con $0 \le z \le 1$ orientata in modo tale che la terza componente del vettore normale sia negativa.

Svolgimento Applichiamo il teorema della divergenza osservando che la superficie data S ed il disco D definito da $z = 1$ e $x^2 + y^2 \le 1$, orientato in modo che la terza componente sia positiva, definisco una superficie chiusa $S \cup D$ con orientamento diretto verso l'esterno. Per il teorema della divergenza si ha

$$\int_{\{(x^2+y^2)^{3/2} \le z\ ,\ 0 \le z \le 1\}} div(\vec{F}) = \phi_{S\cup D}(\vec{F}) = \phi_S(\vec{F}) + \phi_D(\vec{F})$$

Tuttavia si osservi che la divergenza di $\vec{F}$

$$div(\vec{F}) = 6x^5 + 2y$$

è dispari rispetto alla x e rispetto alla y e che il dominio di integrazione $\{(x^2+y^2)^{3/2} \leq z \ , \ 0 \leq z \leq 1\}$ è invariante rispetto allo scambio $x \to -x$ e $y \to -y$ quindi

$$\int_{\{(x^2+y^2)^{3/2} \leq z \ , \ 0 \leq z \leq 1\}} div(\vec{F}) = 0 \ \Rightarrow \ \phi_S(\vec{F}) = -\phi_D(\vec{F})$$

Scriviamo la superficie D in forma parametrica usando coordinate cilindriche:

$$D(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi] \ , \ 0 \leq \rho \leq 1 \ .$$

I vettori tangenti sono dati da

$$\partial_\rho D = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \partial_\theta D = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed il vettore normale ad D è dato da

$$N_D = \partial_\rho D \wedge \partial_\theta D = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \phi_S(\vec{F}) &= -\phi_D(\vec{F}) \\ &= -\int_{\{[0,2\pi]\times[0,1]\}} \left\langle \vec{F}(D(\rho,\theta)), N_D(\rho,\theta) \right\rangle d\theta d\rho = \int_{\{[0,2\pi]\times[0,1]\}} -\rho \, d\theta d\rho \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \, \rho = -\pi \end{aligned}$$

5) Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k + \sin k^4}{k^3} \right) (x+1)^k \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiare la convergenza semplice, assoluta ed uniforme.

Svolgimento Si tratta di una serie di pontenze centrata in $x = -1$. Calcoliamo il raggio di convergenza

$$\frac{1}{r} = \lim_k \left| \frac{k + \sin k^4}{k^3} \right|^{1/k} = \lim_k \left(\frac{1}{k^2} \right)^{1/k} (1 + o(1))^{1/k} = 1$$

Quindi la serie converge semplicemente ed assolutamente in $(-2, 0)$ e uniformemente in $[a, b] \subset (-2, 0)$ per ogni $a > -2$ e $b < 0$.

Per $\boxed{\boldsymbol{x = 0}}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+\sin k^4}{k^3} \right)$ che è a termini positivi. Osservando che per $k \to +\infty$

$$\frac{k + \sin k^4}{k^3} = \frac{1}{k^2}(1 + o(1)) \ ,$$

per confronto asintotico con la serie di pontenza la serie converge.

Per $\boxed{\boldsymbol{x = -2}}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+\sin k^4}{k^3}\right)(-1)^k$ che è a termini di segno alterno. Non possiamo applicare il criterio di Leibniz in quanto la derivata prima

$$\frac{d}{dx}\frac{x+\sin x^4}{x^3} = \frac{x^3+4x^6\cos x^4-3x^3-3x^2\sin x^4}{x^6} = -\frac{2}{x^3}-3\frac{\sin x^4}{x^4}+4\cos x^4$$

non è definitivamente di segno constante per $x \to +\infty$; quindi la successione $\frac{k+\sin k^4}{k^3}$ pur tendendo a 0 non è definitivamente decrescente. Questo non vuol dire che la serie non converge. Se studiamo il modulo della serie si ha

$$\left|\frac{k+\sin k^4}{k^3}(-1)^k\right| = \left|\frac{k+\sin k^4}{k^3}\right| = \frac{1}{k^2}(1+o(1)) \ ,$$

quindi per confronto asintotico con le serie di potenze si ha che per $x=-2$ la serie è assolutamente convergente.

6) Dato il campo vettoriale $\vec{F} = (-x, -ye^{y^2})$ ed il sistema equazioni differenziali del del secondo ordine

$$\ddot{x} = -x$$
$$\ddot{y} = -ye^{y^2}$$

1. *Provare che il sistema è conservativo e determinare l'energia potenziale associata.*
2. *Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità*

Svolgimento 1.) Si verifica facilmente che la forma differenziale ω_F associata al campo $\vec{F}$ è chiusa quindi esatta in quanto definita su $\mathbb{R}^2$ che é semplicemente connesso. Si tratta quindi di un campo conservativo la cui energia potenziale U verifica le relazione $\vec{F} = -\nabla U$:

$$\begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ye^{y^2} \end{pmatrix}$$

La prima equazione implica che $U(x,y) = x^2/2 + h(y)$. Imponiamo su questa la seconda equazione

$$\partial_y h(y) = \partial_y U = ye^{y^2} \quad \Rightarrow \quad h(y) = e^{y^2}/2$$

Quindi

$$U(x,y) = x^2/2 + e^{y^2}/2$$

2.) I punti di equilibrio sono gli zeri del campo $\vec{F}$ o equivalemntemente i punti critici dell'energia potenziale. Si vede facilmente che l'unico punto di equilirio del sistema è $(0,0)$. Per capire se si stratta di un punto di equilibrio stabile vediamo se si tratta di un minimo dell'energia potenziale. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_U(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{y^2}+2y^2e^{y^2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_U(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $H_U(0,0)$ é definita positiva; $(0,0)$ minimo di U; $(0,0)$ punto di equilibrio stabile.

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica - 1 Febbraio 2016
Soluzione della Versione B

1) Data la funzione

$$f(x,y) := 2y^3 + 3yx^2$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Trovare massimo e minimo assoluto di f nella regione $K := \{x^2 + y^2 \le 9\}$.*

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l;'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6xy \\ 6y^2 + 3x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0 \ , \ y = 0$$

Quindi l'unico punto critito è l'origine $(0,0)$. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 12y \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi l'informazione contenuta nel punto $(0,0)$ non è sufficiente a stabilire di che punto si tratta. Tuttavia si osservi che $det(H_f(x,y)) = 72y^2 - 36x^2$ cambia segno in ogni intorno di $(0,0)$ quindi non è ne localmente convessa ne localmente concava in ogni intorno di $(0,0)$. Per cui $(0,0)$ è necessariamente un **punto di sella**. Allo stesso risultato si arriva osservando che $f(0,0) = 0$ e che sull'asse $x = 0$ si ha $f(0,y) = 2y^3$; quindi $f(0,y) > 0$ per $y > 0$ e $f(0,y) < 0$ per $y < 0$.

2.) L'insieme K è chouso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette in K massimo e minimo assoluto. Abbiamo già osservato che f non ha max e min relativi su $\mathbb{R}^2$. Quindi studiamo la funzione f sul vincolo $x^2 + y^2 = 9$.

$$f(x,y) = 2y^3 + 3yx^2 \ , \ x^2 + y^2 = 9 \iff h(x) = 2y^3 + 3y(9 - y^2) = -y^3 + 27y = y(-y^2 + 27)$$

dove abbiamo indicato con h la restrizione di f al vincolo. Derivando h otteniamo $h'(x) = -3y^2 + 27 = 3(-y^2 + 9)$ da cui si evince che $x = -3$ è un minimo locale e che $x = 3$ é massimo locale di h. In particolare $h(-3) = -54$ e $h(3) = 54$. Le ordinate associate a tali valori le otteniamo dall'equazione del vincolo $x^2 = 9 - y^2$: Si ha:

$$P_1 = (0,3) \quad \textbf{massimo assoluto} \ ; \ P_2 = (0,-3) \quad \textbf{minimo assoluto} \ .$$

2) Data la forma differenziale

$$\omega := -\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$$

Calcolare l'integrale di ω lungo la curva

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} e^{t^2}(t^2 + 3t + 2) \\ t \end{pmatrix} \ , \qquad t \in [-2,-1]$$

Svolgimento. Si tratta una una forma differenziale chiusa ma non esatta. Non ammette quindi una primitiva nel suo dominio di definizione $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Tuttavia il supporto della curva γ è contenuto nell'insieme $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ che è un aperto convesso, quindi semplicemente connesso. Quindi ogni curva β contenuta in $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ che ha lo stesso punto iniziale di γ e lo stesso punto finale di γ è omotopa in $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ a γ. Essendo ω chiusa si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\beta \omega$$

Quindi per calcolare l'integrale scegliamo un'opportuna curva β. Si osservi che $\gamma(-2) = (0,-2)$ e $\gamma(-1) = (0,-1)$, scegliamo quindi il segmento che unisce questi due punti $\beta(t) := (0,t)$ con $t \in [-2,-1]$. Si osservi che $\dot{\beta}(t) = (0,1)$. Quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_\beta \omega = \int_{-2}^{-1} dt\, a_1(\beta(t))\dot{\beta}_1(t) + a_2(\beta(t))\dot{\beta}_2(t) = \int_{-2}^{-1} dt\, a_2(\beta(t))\dot{\beta}_2(t)$$

(dove abbiamo indicato con a_1, a_2 rispettivamente la prima e la seconda componente di ω e con $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2$ la prima e la seconda componente di $\dot{\beta}$) in quanto $a_2(\beta(t)) = 0$.

3) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^2 + y, y^4 + z, 1)$ attraverso la surperficie di equazione $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ con $0 \leq z \leq 1$ orientata in modo tale che la terza componente del vettore normale sia negativa.

Svolgimento. Applichiamo il teorema della divergenza osservando che la superficie data S ed il disco D definito da $z = 1$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, orientato in modo che la terza componente sia positiva, formano una superficie chiusA $S \cup D$ con orientamento diretto verso l'esterno. Per il teorema della divergenza si ha

$$\int_{\{(x^2+y^2)^{3/2} \leq z \ ,\ 0 \leq z \leq 1\}} div(\vec{F}) = \phi_{S\cup D}(\vec{F}) = \phi_S(\vec{F}) + \phi_D(\vec{F})$$

Tuttavia si osservi che la divergenza di $\vec{F}$

$$div(\vec{F}) = 2x + 4y^3$$

è dispari rispetto alla x ed alla y e che il dominio di integrazione $\{(x^2 + y^2)^{3/2} \leq z \ ,\ 0 \leq z \leq 1\}$ è invariante rispetto allo scambio $x \to -x$ e $y \to -y$ quindi

$$\int_{\{(x^2+y^2)^{3/2} \leq z \ ,\ 0 \leq z \leq 1\}} div(\vec{F}) = 0 \ \Rightarrow\ \phi_S(\vec{F}) = -\phi_D(\vec{F})$$

Scriviamo la superficie D in forma parametrica usando coordinate cilindriche:

$$D(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \theta \in [0,2\pi] \ ,\ 0 \leq \rho \leq 1 \ .$$

I vettori tangenti sono dati da

$$\partial_\rho D = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \partial_\theta D = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed il vettore normale ad D è dato da

$$N_D = \partial_\rho D \wedge \partial_\theta D = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\phi_S(\vec{F}) &= -\phi_D(\vec{F}) \\
&= -\int_{\{[0,2\pi]\times[0,1]\}} \left\langle \vec{F}(D(\rho,\theta)), N_D(\rho,\theta) \right\rangle d\theta d\rho = \int_{\{[0,2\pi]\times[0,1]\}} -\rho\, d\theta d\rho \\
&= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\, \rho = -\pi
\end{aligned}$$

4) Calcolare l'integrale $\int_D e^y \, dxdy$, dove $D := \{-x+1 \le y \le -x+4 \ , \ 1+2y \le x \le 2y+3\}$.

Svolgimento L'insieme di integrazione è un parallelogramma. Conviene eseguire un cambio di variabili: si osservi infatti che

$$-x+1 \le y \le -x+4 \iff 1 \le y+x \le 4 \qquad 1+2y \le x \le 2y+3 \iff 1 \le x-2y \le 3$$

Ponendo $u := y+x$ e $v := x-2y$ il dominio di integrazione diventa, nelle nuove variabili, un rettangolo $D = \{1 \le u \le 4 \ , \ 1 \le v \le 3\}$. Calcoliamo la matrice Jacobiana J della trasformazione:

$$x = \frac{2u+v}{3} \quad , \quad y = \frac{u-v}{3} \quad \Rightarrow \ J(u,v) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \ , \ |det(J(u,v))| = 1/3$$

Quindi

$$\int_D e^y \, dxdy = \int_1^4 du \int_1^3 dv \, \frac{e^{(u-v)/3}}{3} = \frac{1}{3}\int_1^4 du \, e^{u/3} \int_1^3 dv \, e^{-v/3} = -3(e^{4/3}-e^{1/3})(e^{-1}-e^{-1/3})$$

5) Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+\cos k^5}{k^4}\right)(x+2)^k \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiare la convergenza semplice, assoluta ed uniforme.

Svolgimento Si tratta di una serie di pontenze centrata in $x=-2$. Calcoliamo il raggio di convergenza

$$\frac{1}{r} = \lim_k \left|\frac{k^2+\cos k^5}{k^4}\right|^{1/k} = \lim_k \left(\frac{1}{k^2}\right)^{1/k} (1+o(1))^{1/n} = 1$$

Quindi la serie converge semplicemente ed assolutamente in $(-3,-1)$ e uniformemente in $[a,b] \subset (-3,-1)$ per ogni $a > -3$ e $b < -1$.

Per $\boxed{\boldsymbol{x = -1}}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2+\cos k^5}{k^4}\right)$ che è a termini positivi. Il suo sviluppo asintotico è

$$\frac{k^2+\cos k^5}{k^4} = \frac{1}{k^2}(1+o(1)) \ .$$

Qundi per confronto asintotico con le serie di potenze si ha convergenza.

Per $\boxed{\boldsymbol{x = -3}}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2+\cos k^5}{k^4}\right)(-1)^k$ che è a termini di segno alterno. Si osservi che non possiamo applicare il criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno. Infatti se studiamo la derivata prima si ha

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2+\cos x^5}{x^4} = \frac{2x^5-5x^8\sin x^4-4x^5-4x^3\cos x^5}{x^8} = -\frac{2}{x^3} - 4\frac{\cos x^5}{x^5} - 5\sin x^5$$

che non è definitivamente di segno constante per $x \to +\infty$; quindi la successione $\frac{k^2+\cos k^5}{k^4}$ pur tendendo a 0 non è definitivamente decrescente. Questo non implica che la serie non converge. Infatti studiando il modulo della serie si ha

$$\left|\frac{k^2+\cos k^5}{k^4}(-1)^k\right| = \left|\frac{k^2+\cos k^5}{k^4}\right| = \frac{1}{k^2}(1+o(1)) \ ,$$

e quindi per confronto asintotico con le serie di potenze si ha che per $x=-3$ la serie converge assolutamente.

6) Dato il campo vettoriale $\vec{F} = (-2xe^{-x^2}, -2y)$ ed il sistema equazioni differenziali del del secondo ordine

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2xe^{-x^2} \\ \ddot{y} &= -2y \end{aligned}$$

1. *Provare che il sistema è conservativo e determinare l'energia potenziale associata.*
2. *Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.*

Svolgimento 1.) La forma differenziale ω_F associata al campo $\vec{F}$ è chiusa e, di conseguenza, esatta in quanto definita su tutto $\mathbb{R}^2$ (che é semplicemente connesso). Si tratta quindi di un campo conservativo cui energia potenziale U verifica le relazione $\vec{F} = -\nabla U$:

$$\begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xe^{-x^2} \\ 2y \end{pmatrix}$$

La seconda equazione implica che $U(x, y) = y^2/2 + h(x)$. Imponiamo su questa la prima equazione

$$\partial_x h(x) = \partial_x U = 2xe^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad h(x) = -e^{-x^2}/2$$

Quindi

$$U(x, y) = y^2/2 - e^{-x^2}/2$$

2.) I punti di equilibrio sono gli zeri del campo $\vec{F}$ o equivalemntemente i punti critici dell'energia potenziale. Si vede facilmente che l'unico punto di equilirio del sistema è $(0, 0)$. Per capire se si stratta di un punto di equilibrio stabile vediamo se si tratta di un minimo dell'energia potenziale. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_U(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi $H_U(0, 0)$ é definita positiva; $(0, 0)$ minimo di U; $(0, 0)$ punto di equilibrio stabile.

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 2 Febbraio 2017

1) Data la funzione

$$f(x) := (x + y^2) \cdot xy - 2$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Determinari estremi della funzione nella regione* $E := \{y + x \geq 0\}$.

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy + y^3 \\ x^2 + 3xy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cdot (2x + y^2) \\ x \cdot (x + 3y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (0, 0) \; .$$

Quindi l'unico punto critito è l'origine $(0, 0)$. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 3y^2 \\ 2x + 3y^2 & 6xy \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi l'informazione contenuta nel punto $(0, 0)$ non è sufficiente a stabilire la natura del punto critico. Tuttavia se andiamo ad analizzare il segno di $f(x, y) - f(0, 0)$ nell'intorno di $(0, 0)$ si ha

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x + y^2) \cdot xy \geq 0$$

si vede ad esempio che

$$f(x, y) - f(0, 0) > 0 \text{ per } y > 0,\ x > 0 \quad ; \quad f(x, y) - f(0, 0) < 0 \text{ per } x > 0,\ y < 0 \; ,$$

che implica un cambiamento di segno in ogni intorno dell'origine. In conclusione $(0, 0)$ **è un punto di sella.**

2.) L'insieme E non è limitato. Quindi la funzione può non avere massimi e minimi assoluti. Nella regione $y > -x$ la funzione non ha punti estremali (segue dallo studio precendente degli estremi liberi). Quindi studiamo il comportamento di f lungo la frontiera di E ossia la curva $y = -x$. Si osservi che $f(x, -x) = -x^3 - x^4 + 2$. Allora

$$f'(x, -x) = -x^2(3 + 4x) = 0 \iff x = 0 \; , \; x = -\frac{3}{4}$$

e l'analisi del segno

$$f'(x, -x) = -x^2(3 + 4x) > 0 \iff x < -\frac{3}{4}$$

Quindi il punto $x = -\frac{3}{4}$ è un massimo relativo della funzione ristretta alla curva; mentre $x = 0$ è un punto di flesso.

Per capire se si tratta di una massimo relativo della funzione sull'insieme E studiamo il gradiente della funzione nel punto di $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$:

$$\nabla f \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{18}{16} + \frac{27}{64} \\ \frac{9}{16} - \frac{81}{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-72+27}{64} \\ \frac{36-81}{64} \end{pmatrix} = \frac{-1}{64} \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Si vede che $\nabla f \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$ è diretto verso l'esterno di E. Quindi $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ **è un massimo relativo della funzione ristretta all'insieme** E.

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

calcolare gli integrali $\int_{\gamma_1}\omega$, $\int_{\gamma_2}\omega$ *e* $\int_{\gamma_3}\omega$ *lungo le seguenti curve*

$$\gamma_1(t) := \begin{pmatrix} e^t(1-t) \\ \frac{\ln(t+1)}{\ln(2)} \end{pmatrix} \;;\; \gamma_1(t) := \begin{pmatrix} (t^2+1) \\ e^{-t}(1-t+2et) \end{pmatrix} \;;\; \gamma_3(t) := \begin{pmatrix} \sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

con $t \in [0,1]$

Svolgimento La forma differenzial ̀definita in nell'insieme $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed è chiusa in quanto

$$\partial_y a_1 = \partial_y \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{yx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \partial_x \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \partial_y a_2$$

Sebbene il dominio di definizione D non sia semplicemente connesso la forma differenziale risulta esatta. Infatti, se imponiamo le equazione che definiscono la primitiva si ottiene

$$\partial_x f = a_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + h(y)$$

e

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \partial_y h(y) = \partial_y f = a_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \Rightarrow \quad h(y) = cost\ .$$

Quindi la funzione

$$\boxed{f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}}$$

verifica la relazione $df = \omega$ ed è definita sullo stesso dominio di ω, quindi è una primitiva di ω.

Per il calcolo degli integrali curvilinei a questo punto sarà sufficiente calcolare il punto iniziale e finale delle curve in quanto in generale vale la relazione $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ per ogni curva regolare a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ deifnita nel dominio di ω. Quindi

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_1(0)) = f(0,1) - f(1,0) = 0$$

$$\int_{\gamma_2} \omega = f(\gamma_2(1)) - f(\gamma_2(0)) = f(2,2) - f(1,1) = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\int_{\gamma_3} \omega = 0$$

in quanto γ_3 è chiusa.

3) Calcolare l'area della superficie σ definita in forma parametrica nel seguente modo

$$\sigma(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ t+s \end{pmatrix} \quad \textit{dove } \frac{1}{t} \le s \le \frac{4}{t} \quad , \quad t \le s \le 2t \quad , \quad t > 0 \ .$$

Svolgimento Il vettore normale alla superficie risulta

$$N_\sigma(t.s) = \partial_t\sigma(t,s) \wedge \partial_s\sigma(t,s) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

L'area della superficie

$$A(\sigma) = \int_{\frac{1}{t} \le s \le \frac{4}{t},\ t \le s \le 2t,\ t>0} \|N_\sigma(t.s)\|\, dtds = \int_{\frac{1}{t} \le s \le \frac{4}{t},\ t \le s \le 2t,\ t>0} \sqrt{3}\, dtds \ .$$

Per calcolare l'integrale eseguiamo il cambio di variabile

$$u := st \ , \ w := \frac{s}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad s = \sqrt{uw} \ , \ t = \sqrt{\frac{u}{w}}$$

dove $1 \le u \le 4$ e $1 \le w \le 2$, a cui corrissponde la matrice Jacobiana

$$J(u,w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{w}} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uw}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{w^3}} \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ det(J(u,w)) = -\frac{1}{2w} \ .$$

Quindi

$$A(\sigma) = \int_1^4 du \int_1^2 dw \sqrt{3}\, |det(J(u,w))| = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_1^4 du \int_1^2 dw \frac{1}{w} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, 3\ \ln(2)$$

4) Data la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2^k+k^3}{4^k(1+k^2)}\right)(x+1)^k \ , \qquad x\in\mathbb{R}$$

studiare la convergenza semplice, assoluta ed uniforme.

Svolgimento Si tratta di una serie di pontenze centrata in $x=-1$. Si osservi che per $k\to\infty$ si ha

$$a_k := \ln\left(1+\frac{2^k+k^3}{4^k(1+k^2)}\right) = \frac{2^k+k^3}{4^k(1+k^2)}(1+o(1)) = \frac{2^k}{4^k k^2}(1+o(1)) = \frac{1}{2^k k^2}(1+o(1))$$

da cui segue facilmente il raggio di convergenza

$$\frac{1}{r} = \lim_k \left|\ln\left(1+\frac{2^k+k^3}{4^k(1+k^2)}\right)\right|^{1/k} = \lim_k \left(\frac{1}{2^k k^2}(1+o(1))\right)^{1/k} = \lim_k \frac{1}{2}\,\frac{1}{k^{2/k}}(1+o(1))^{1/k} = \frac{1}{2}$$

Quindi il raggio di convergenza è $\boxed{r=2}$ e la serie converge semplicemente ed assolutamente in $(-3,1)$ e uniformemente in $[a,b]\subset(-3,1)$.

Per $\boxed{\boldsymbol{x=1}}$ la serie diventa $\sum_{k=2}^{\infty} 2^k\, a_k$ che è a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo asintotico di prima per $k\to+\infty$ si ha

$$2^k\, a_k = 2^k \frac{1}{2^k k^2}(1+o(1)) = \frac{1}{k^2}(1+o(1)) \ .$$

Quindi per $x=1$ la serie converge per confronto asintotico con la serie $\frac{1}{k^2}$.

Per $\boxed{\boldsymbol{x=-3}}$ la serie diventa $\sum_{k=2}^{\infty} 2^k\, a_k(-1)^k$ che è a termini di segno alterno. Tuttavia passando al modulo e usando lo sviluppo eseguinto per $x=1$ si ha

$$|2^k\, a_k(-1)^k| = |2^k\, a_k| = \frac{1}{k^2}(1+o(1)) \ .$$

Quindi per $x=-3$ la serie converge assolutamente per confronto asintotico con la serie $\frac{1}{k^2}$.

5) Sia dato il sistema di equazioni differenziali $\dot{x} = Ax + f(t)$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ , \ f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Trovare la soluzione generale del sistema.*
2. *Trovare la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale* $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Svolgimento 1.) La matrice A è simmetrica quandi ammette autovalori reali ed è diagonalizzabile. Le radici del polinomio caratteristico sono

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 2 \pm 1 \iff \lambda = 1, 3$$

Quindi gli autovalori sono 1 e 3. Calcoliamo gli autovettori

$$Av = v \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2a+b \\ za+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff a = -b$$

Quindi possiamo prender come autovettore di $\lambda = 1$ il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mentre

$$Aw = 3w \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2a+b \\ za+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix} \iff a = b$$

Quindi possiamo prender come autovettore di $\lambda = 1$ il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi la generica soluzione **dell'omogenea** sarà

$$\boxed{x_o(t) = ae^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Per trovare una soluzione particolare del sistema calcoliamo le due soluzioni ausialiarie dell'omogenea x_a^1 e x_a^2 dell'omogenea definite dalle condizioni iniziali $x_a^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $x_a^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispettivamente. Quindi

$$x_o(0) = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = \frac{1}{2} = b$$

da cui

$$x_a^1(t) = \frac{1}{2} \left(e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Mentre

$$x_o(0) = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff -a = \frac{1}{2} = b$$

da cui

$$x_a^2(t) = \frac{1}{2} \left(e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La soluzione particolare la otteniamo dalla relazione

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t (x_a^1(t-s)f_1(s) - x_a^2(t-s)f_2(s))ds = \int_0^t (x_a^1(t-s)e^s ds \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} \int_0^t (e^{t-s} + e^{3(t-s)})e^s ds \\ \int_0^t (-e^{t-s} + e^{3(t-s)})e^s ds \end{array}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} e^t \int_0^t ds + e^{3t}\int_0^t e^{-2s} ds \\ -e^t \int_0^t ds + e^{3t}\int_0^t e^{-2s} \end{array}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} te^t - \frac{1}{2}e^{3t}(e^{-2t}-1) \\ -te^t - \frac{1}{2}e^{3t}(e^{-2t}-1) \end{array}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} 2te^t - e^t + e^{3t} \\ -2te^t - e^t + e^{3t} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Quindi la soluzione particolare è

$$
\boxed{y(t) = \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} 2te^t - e^t + e^{3t} \\ -2te^t - e^t + e^{3t} \end{array}\right)}
$$

mentre la soluzione generale dell'omogenea sarà

$$
\boxed{x_G(t) = x_o(t) + y(t) = ae^t\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right) + be^{3t}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right) + \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} 2te^t - e^t + e^{3t} \\ -2te^t - e^t + e^{3t} \end{array}\right)}
$$

2) Per quanto riguarda il problema di Cauchy, dal momento che la soluzione particolare ottenuta dalla formula di convoluzione verifica sempre condizione $y(0) = 0$ si ha

$$
x_G(0) = x_o(0) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = 1/2
$$

(si osservi infatti che è la stessa condizione iniziale che definisce l'ausiliaria $x_a^1(t)$. In conclusione la soluzione del problea di Cauchy è la funzione

$$
\boxed{x_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2}\left(e^t\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right) + e^{3t}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} 2te^t - e^t + e^{3t} \\ -2te^t - e^t + e^{3t} \end{array}\right) .}
$$

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 5 Settembre 2016
Soluzioni

1) Data la funzione

$$f(x) := \ln(y) - yx^2 - y$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Trovare massimo e minimo assoluto di f nella regione $K := \{1 \le y \le x^2\ ,\ 1 \le x \le 2\}$.*

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione C^∞ definita nel semipiano $y > 0$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2xy \\ 1/y - x^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy \\ (-y - yx^2 + 1)/y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (0, 1)$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -1/y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana $H_f(0, 1)$ è quindi in forma diagonale. Tutti e due gli autovalori sono negativi. Quindi $(0, 1)$ **è un massimo relativo**.

2.) L'insieme K è chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette in K massimo e minimo assoluto. Dato che il massimo relativo trovato nel punto precedente non appartiene a K, il max e min assoluto si troveranno sulla frontiera di K che è una curva regolare a tratti formata dalle curve

$$\gamma_1 = \{y = x^2\ , 1 \le x \le 2\} \quad , \quad \gamma_2 = \{y = 1\ , 1 \le x \le 2\} \quad , \quad \gamma_3 = \{x = 2\ , 1 \le y \le 4\} \ .$$

e con tre punti singolari

$$(1, 1)\ ,\ (2, 1)\ ,\ (2, 4)$$

Studiamo le restizioni di f sulle tre curve e confronteremo gli eventuali punti estremali trovati con i valori assunti dalla funzione sui tre punti singolari.

$\boxed{f \restriction \gamma_1}$ In tal caso si ha

$$h_1(x) := f(x, y) \restriction \gamma_1 = 2\ln(x) - x^4 - x^2\ ,\ 1 \le x \le 2\ .$$

Si osservi che la derivata prima di h_1 per $x \in [1, 2]$ è sempre negativa

$$h_1'(x) = 2/x - 4x^3 - 2x = \frac{2 - 4x^4 - 2x^2}{x} < 0 \quad , \quad 1 \le x \le 2$$

Quindi h_1 non ha punti estremali; max e minimo assoluto si trovano sulla frontiera del suo intervallo di definizione (che corrispondono a due dei punti singolari della frontiera di K).

$\boxed{f \restriction \gamma_2}$ In tal caso si ha

$$h_2(x) := f(x, y) \restriction \gamma_2 = -x^2 - 1 \quad , \quad 1 \le x \le 2\ .$$

Non è necessario derivare h_2 in quanto sappiamo che questa funzione ha un solo punto estremale che si trova in $x = 0$ il quale peró non appartiene all'intervallo di definizione. Anche in questo caso max e minimo assoluto si trovano sulla frontiera del suo intervallo di definizione.

$\boxed{f \restriction \gamma_2}$ In tal caso si ha

$$h_3(y) := f(x,y) \restriction \gamma_3 = \ln(y) - 5y \quad , \quad y \in [1,4]$$

La derivata prima di h_3 risulta per $y \in [1,4]$ sempre negativa

$$h_3'(y) = 1/y - 5 = \frac{1-5y}{y} < 0 \quad , \quad y \in [1,4]$$

Quindi h_3 non ha punti estremali e max e minimo assoluto si trovano sulla frontiera del suo intervallo di definizione.

Non essedoci punti estremali sulla frontiera di K il max e minimo assoluto si trovarenno nei punti singolari della frontiera

$$f(1,1) = -2 \quad , \quad f(2,1) = -5 \quad , \quad f(2,4) = \ln(4) - 20 \ .$$

Quindi $(1,1)$ **massimo assoluto** e $(2,4)$ **minimo assoluto**.

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \left(\frac{-8x}{16-4x^2-y^2}+y\right)\,dx + \left(\frac{-2y}{16-4x^2-y^2}+x\right)\,dy\ ,$$

determinare, motivando le risposte, gli integrali $\int_{\gamma_1}\omega$, $\int_{\gamma_2}\omega$ *e* $\int_{\gamma_3}\omega$ *dove*

$$\gamma_1(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_2(t) := \begin{pmatrix} t(t-1) \\ \ln(1+t(e-1)) \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_3(t) := \begin{pmatrix} \sin(t\pi/2) \\ 2t^3 \end{pmatrix}\ ,$$

per $t \in [0,1]$

Svolgimento. La forma differenziale ω è definita in un insieme non connesso $D = \{16 - 4x^2 - y^2 \neq 0\}$ formato dall'unione disgiunta degli insiemi

$$D = D_0 \cup D_\infty \quad , \quad D_0 := \{4x^2+y^2 < 16\} \quad , \quad D_\infty := \{4x^2+y^2 > 16\}\ .$$

Si verifica facilmente che la forma differenziale ω è chiusa nel suo dominio di definizione. Indichiamo con ω_0, ω_∞ rispettivamente la restrizione di ω a D_0 e D_∞. Dato che D_0 é convesso (la parte interna di una ellisse), quindi semplicemente connesso, ω_0 é esatta. Al contrario D_∞ non è semplicemnte connesso. Questo non vuol dire che che ω_∞ non sia esatta, ma solo che non è possibile stabilire l'esattezza della forma ω_∞ dal teorema che lega la semplice connessione del dominio con l'esattezza di form chiuse (vedremo tra breve che in effetti anche ω_∞ é esatta).

Tuttavia per il problema in esame, si osservi che tutte é tre le curve su cui vogliamo calcolare l'integrale di ω hanno supporto all'interno di D_0. Quindi $\int_{\gamma_i}\omega = \int_{\gamma_i}\omega_0$, con $i = 1,2,3$, e per calcolare i tre integrali sarà sufficiente calcolare una primitiva di ω_0.

Posto $a(x,y) = \left(\frac{-8x}{16-4x^2-y^2}+y\right)$ e $b(x,y) = \left(\frac{-2y}{16-4x^2-y^2}+x\right)$, proviamo a calcolare una primitiva f della forma differenziale ω

$$\partial_x f = a(x,y) = \left(\frac{-8x}{16-4x^2-y^2}+y\right) \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \ln|16-4x^2-y^2| + xy + h(x)$$

e

$$\partial_y f = \frac{-2y}{16-4x^2-y^2} + x + \partial_y h = b(x,y) = \frac{-2y}{16-4x^2-y^2} + x \Rightarrow\ h(x) = cost\ .$$

Scegliendo $h = 0$, una primitiva della forma differenziale ω è

$$\boxed{f(x,y) = \ln|16-4x^2-y^2| + xy\ .}$$

Il modulo all'interno del logaritmo tiene conto del fatto che ω è definita su un insieme non connesso. Restrigendo f a D_0 e D_∞ ottieniamo due primitive

$$f_0(x,y) = \ln(16-4x^2-y^2) + xy \quad , \quad f_\infty = \ln(-16+4x^2+y^2) + xy\ ,$$

delle forme differenziali ω_0 e ω_∞, rispettivamente. Tornando al calcolo degli integrali si ha

$$\int_{\gamma_i}\omega = \int_{\gamma_i}\omega_0 = f_0(\gamma_i(1)) - f_0(\gamma_i(0)) \quad , \quad i = 1,2,3.$$

In conclusione

$$\boxed{\int_{\gamma_1}\omega = \ln(11/16) + 1 \quad ; \quad \int_{\gamma_2}\omega = \ln(15/16) \quad ; \quad \int_{\gamma_3}\omega = 2 - \ln(2)\ .}$$

3) Calcolare l'integrale

$$\int_D (y+x)\, dxdy \ ,$$

dove $D := \{-\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y} \ , \ 0 \le y \le 1\}$.

Svolgimento. Si osservi che l'insieme di definizione è simmetrico rispetto all'asse y, ossia é invariante rispetto allo scambio $x \to -x$. Di conseguenza

$$\int_D (y+x)\, dxdy = \int_D y\, dxdy + \int_D x\, dxdy = 2\int_{D_1} y\, dxdy$$

in quanto la funzione x é dispari quindi $\int_D x\, dxdy$, mentre essendo la funzione y "pari" rispetto alla x si ha che $\int_D y\, dxdy = 2\int_{D_1} y\, dxdy$ dove

$$D_1 := \{0 \le x \le \sqrt{1-y} \ , \ 0 \le y \le 1\} \ .$$

Si osservi ora che l'insieme D_1 oltre ad essere semplice sia rispetto alla variabile x é anche semplice rispetto alla variabile y infatti

$$D_1 = \{0 \le y \le 1 - x^2 \ , \ 0 \le x \le 1\}$$

Quindi

$$\int_D (y+x)\, dxdy = 2\int_{D_1} y\, dxdy = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy\, y = \int_0^1 dx \big[y^2\big]_0^{1-x^2}$$
$$= \int_0^1 dx(1-x^2)^2 = \big[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\big]_0^1 = \frac{8}{15}$$

4) Dato il campo vettoriale $\vec{F} = (y, -x, z)$ cal colare il flusso di $\mathrm{rot}(\vec{F})$ attraverso la surperficie di equazione $z = (x^2 + y^2)^3$ con $0 \leq z \leq 1$ orientata in modo tale che la terza componente del vettore normale sia positiva.

Svolgimento. Si osservi che la frontiera ∂S della superficie S su cui si vuole calcolare il flusso di $\mathrm{rot}(\vec{F})$ è la circoferenza di raggio 1 posta sul piano $z = 1$. Applichiamo quindi il teorema di Stokes:

$$\int_S \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N}_S = \int_{\partial S^+} \vec{F} \ ,$$

dove ∂S^+ é la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario, in quanto S è orientata in modo che con terza componente del vettore normale $\vec{N}_S$ risulti positiva. Quindi in coordinate polari si ha

$$\partial S^+(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \partial \dot{S}^+(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Infine

$$\int_S \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N}_S = \int_{\partial S^+} \vec{F} = \int_0^{2\pi} d\theta(-\sin^2\theta - \cos^2\theta) = -2\pi \ .$$

5) Data la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty}\big(\ln(k^2\,3^k+1)-\ln(k^2\,3^k)\big)\;(x-1)^k\ ,\qquad x\in\mathbb{R}$$

studiarne la convergenza semplice, assoluta ed uniforme. Motivare le risposte.

Svolgimento Si tratta di una serie di potenze centrata in $x = 1$. Calcoliamo il raggio di convergenza. Posto

$$f(k) := \big(\ln(k^2\,3^k+1)-\ln(k^2\,3^k)\big) = \ln\left(1+\frac{1}{k^2 3^k}\right)$$

determiniamo il raggio di convergenza calcolando il limite

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \lim (f(k))^{1/k} = \lim_k \left(\ln\left(1+\frac{1}{k^2 3^k}\right)\right)^{1/k}\\ &= \lim_k \left(\frac{1}{k^2 3^k}\right)^{1/k}(1+o(1)) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Quindi il **raggio di convergenza è** $\boxed{r=3}$.

Quindi si ha **convergenza assoluta, quindi anche semplice, nell'intervallo** $(-2,4)$ e **convergenza uniforme** in ogni intervallo chiuso $[a,b]\subset(-2,4)$.

La serie **converge sulla frontiera** dell'intervallo $(-2,4)$. Infatti, sd esempio, per $x = 4$ usando la stessa approssimazione di prima, i termini della serie diventano

$$f(k)\,3^k = \ln\left(1+\frac{1}{k^2 3^k}\right)3^k = 3^k\frac{1}{k^2 3^k}(1+o(1)) = \frac{1}{k^2}(1+o(1))\ .$$

che per confronto asintotico con la serie $\frac{1}{k^2}$ converge. In maniera analoga per $x = -2$ si ha

$$f(k)\,3^k(-1)^k = \frac{(-1)^k}{k^2}(1+o(1))$$

che converge assolutamente e quindi anche semplicemente. In conclusione si ha convergenza **assoluta e uniforme in tutto l'intervallo** $[-2,4]$.

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 13 Luglio 2016
Soluzioni

1) Data la funzione

$$f(x) := x^3y + y^2x + 8$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Trovare massimo e minimo assoluto di f nella regione $K := \{0 \leq y \leq 1 - x^2\}$.*

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2y + y^2 \\ x^3 + 2yx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y + y^2 \\ x(x^2 + 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (0,0)$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 + 2y \\ 3x^2 + 2y & 2x \end{pmatrix} .$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice Hessiana non ci da informazioni. Tuttavia si osservi che se restringiamo la funzione all'asse $y = x$ si ha che

$$f(x,x) - 8 = x^4 + x^3$$

che ha un cambiamento di segno nell'intorno di $x = 0$. Di conseguenza $(0,0)$ **è un punto di sella**.

2.) Si osservi che l'insiem K è chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette in K massimo e minimo assoluto. Abbiamo già osservato che f non ha max e min relativi su $\mathbb{R}^2$. Quindi andiamo a vedere come si comporta sulla frontiera/ Si osservi che la funzione ristretta alla retta $y = 0$ è costante: $f(x,0) = 8$ quindi ci rimane da studiare la funzione sulla curva $y = 1 - x^2$ per $-1 \leq x \leq 1$. Sostituendo $y = 1 - x^2$ si ottiene la funzione

$$g(x) := f(x, 1 - x^2) = x^3(1 - x^2) + (1 - x^2)^2x + 8 = x^3 - x^5 + x - 2x^3 + x^5 + 8 = -x^3 + x + 8$$

Ora

$$g'(x) = -3x^2 + 1 = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - x\right)$$

Quindi $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è un punto di minimo relativo mentre $x = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ è un massimo reltaivo della funzione ristretta sull curva. Quindi

$$f(1/\sqrt{3}), 1 - 1/3) = g(1/\sqrt{3}) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 8 = \frac{2}{\sqrt{3}} + 8 .$$

$$f(-1/\sqrt{3}), 1 - 1/3) = g(-1/\sqrt{3}) = +\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 8 = -\frac{2}{\sqrt{3}} + 8 .$$

Che confrontati con il valore della funzione in $y = 0$, $f(x,0) = 8$, danno il seguente risultato:

- il punto $(1/\sqrt{3}, 2/3)$ è il **massimo assoluto** della funzione su K;
- il punto $(-1/\sqrt{3}, 2/3)$ è il **minimo assoluto** della funzione su K.

2) Data la forma differenziale

$$\omega_1 := \frac{y(2-x^2)\ln(2-x^2) - 2yx^2}{(2-x^2)}\, dx + x\ln(2-x^2)\, dy$$

1. *Dire, motivando le risposte, se ω_1 è una forma differenziale esatta e, in caso affermativo, calcolarne una primitiva.*
2. *Data la forma differenziale*

$$\omega_2 := \left(\frac{y(2-x^2)\ln(2-x^2) - 2yx^2}{(2-x^2)} - \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(x\ln(2-x^2) + \frac{x}{x^2+y^2} \right) dy$$

calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega_2$ lungo la circonferenza $x^2+y^2=1$.

Svolgimento 1.) Il dominio della forma differenziale, definito dalla condizione che l'argomento del logaritmo si maggiore di zero è la striscia $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Tale insieme è convesso, quindi semplicemente connesso. Verifichiamo se ω_1 verifica le condizioni di chiusura. Indicando con a ed b la prima e la seconda componente di ω_1 si ha

$$\boxed{\partial_y a(x,y) = \frac{(2-x^2)\ln(2-x^2) - 2x^2}{(2-x^2)} = \partial_x b(x,y)\ .}$$

Quindi ω_1 è esatta. Calcolimo una primitiva f imponendo

$$\partial_y f = b(x,y) = x\ln(2-x^2) \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = yx\ln(2-x^2) + h(x)$$

e

$$\partial_x f = y\ln(2-x^2) - \frac{2x^2 y}{2-x^2} + \partial_x h = a(x,y) = \frac{y(2-x^2)\ln(2-x^2) - 2yx^2}{(2-x^2)} \quad \Rightarrow \quad h(x) = cost\ .$$

Scegliendo $h = 0$, una primitiva di ω_1 è

$$\boxed{f(x,y) = yx\ln(2-x^2)\ .}$$

2.) ω_2 è una forma chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ che non è semplicemente connesso. Quindi non possiamo affermare che ω_2 sia esatta. Si osservi che ω_2 si può decomporre nel modo seguente

$$\omega_2 = \omega_1 + \phi \quad \text{ dove } \quad \phi := \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right)$$

Ora ω_1 è esatta quindi il suo integrale lungo la circonferenza γ è uguale a zero. Invece la forma differenziale ϕ è il noto esempio di forma differenziale chiusa ma non esatta. Dato che la curva γ di integrazione percorre un giro intorno alla "lacuna" di ϕ, si vede facilmente che $\int_{\gamma^\pm} \phi = \pm 2\pi$ dove il segno piú si ha se la curva é orientata in senso antiorario γ^+, il segno meno nel caso opposto. In conclusione

$$\boxed{\int_{\gamma^\pm} \omega_2 = \int_{\gamma^\pm} \omega_1 + \int_{\gamma^\pm} \phi = \pm 2\pi\ .}$$

3) Calcolare, in senso improprio, l'integrale

$$\int_D \frac{e^y}{(e^y+1)^2(\sqrt{x^2+3y^2})} x\, dxdy \ ,$$

dove $D := \{0 \leq y \leq x \ , \ 0 \leq x^2+3y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento. L'integrale è definito in senso improprio a causa del termine $\sqrt{x^2+3y^2})$ che si annulla nell'origine che è contenuta nell'insieme D. Per calcolare l'integrale consideriamo la famiglia di insiemi

$$D_\varepsilon := \{0 \leq y \leq x \ , \ \varepsilon \leq x^2+3y^2 \leq 1\} \ , \ \varepsilon > 0 \ ;$$

osserviamo che $\cup_{\varepsilon>0} D_\varepsilon = D \setminus \{0\}$; calcoliamo l'integrale $\int_{D_\varepsilon} f$ ed eseguiamo il limite per $\varepsilon \to 0$. Dal momento che la funzione integranda f è positiva nel dominio di integrazione il risultato non dipende dalla scelta degli insiemi che va a ricoprire D.

Come prima cosa passiamo in coordinate ellittiche ponendo

$$x = \rho\cos(\theta) \quad , \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\rho\sin(\theta) \ .$$

ed osserviamo che il dominio D_ε si descrive, in tali coordinate, dalle relazioni

$$\varepsilon \leq \rho^2 \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{3}} \leq \cos(\theta) \iff 0 \leq \theta \leq \pi/3 \ .$$

La matrice jacobiana associata alla trasformazione diventa

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)/\sqrt{3} \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta)/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\det J| = \rho/\sqrt{3}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{D_\varepsilon} f &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_\varepsilon^1 d\rho \int_0^{\pi/3} d\theta \, \frac{e^{(\rho\sin(\theta)/\sqrt{3})}}{(e^{(\rho\sin(\theta)/\sqrt{3})}+1)^2\,\rho}\,\rho^2\cos(\theta) \\
&= -\int_\varepsilon^1 d\rho \left[\frac{1}{e^{(\rho\sin(\theta)/\sqrt{3})}+1}\right]_0^{\pi/3} = -\int_\varepsilon^1 d\rho \left(\frac{1}{e^{(\rho/2)}+1} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1-\varepsilon}{2} - \int_\varepsilon^1 d\rho\, \frac{1}{e^{(\rho/2)}+1} \ .
\end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale cambiamo variabile ponendo $t = e^{\rho/2}$ da cui $\rho = 2\ln(t)$ e $d\rho = \frac{2\,dt}{t}$:

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 d\rho\, \frac{1}{e^{(\rho/2)}+1} &= 2\int_{e^{\varepsilon/2}}^{e^{1/2}} dt\, \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t} = 2\int_{e^{\varepsilon/2}}^{e^{1/2}} dt \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \\
&= 2\ln\left(\frac{e^{1/2}}{e^{1/2}+1}\right) - 2\ln\left(\frac{e^{\varepsilon/2}}{e^{\varepsilon/2}+1}\right) \ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\varepsilon} f = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon}{2} + 2\ln\left(\frac{e^{\varepsilon/2}}{e^{\varepsilon/2}+1}\right) - 2\ln\left(\frac{e^{1/2}}{e^{1/2}+1}\right) = \frac{1}{2} - 2\ln(2) - 2\ln\left(\frac{e^{1/2}}{e^{1/2}+1}\right) = -\frac{1}{2} + 2\ln\left(\frac{e^{1/2}+1}{2}\right)$$

4) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x + z, y, z)$ attraverso la surperficie S definita dalle equazioni

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2y \quad , \quad x^2 + y^2 \leq z\}$$

orientata in modo tale che la terza componente del vettore normale sia positiva.

Svolgimento. Calcoliamo forma parametrica della superficie S. Sostituendo l'equazione del piano $z = 2y$ nella seconda equazione si ottiene:

$$x^2 + y^2 \leq 2y \iff x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$$

Quindi la superficie Sé definita dall'equazione

$$S(t, s) := \begin{pmatrix} t \\ s \\ 2s \end{pmatrix} \quad , \quad t^2 + (s - 1)^2 \leq 1$$

Calcoliamo il vettore normale $\vec{N}$ alla superficie Il vettore normale alla superficie:

$$\partial_t S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \partial_t S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{N} = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che ha l'orientazione richiesta dal problema. Ora

$$\boxed{\Phi_S(\vec{F}) = \int_{t^2+(s-1)^2 \leq 1} \left\langle \vec{F}(t, s, 2s), \vec{N}(t, s) \right\rangle = \int_{t^2+(s-1)^2 \leq 1} \left\langle \begin{pmatrix} t + 2s \\ s \\ 2s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0}$$

5) Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\ln(k) + k^3 + 2^k} - \sqrt{2^k} \right) (x-1)^k \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiarne, motivando le risposte, la convergenza semplice, assoluta ed uniforme.

Svolgimento Si tratta di una serie di potenze centrata in $x = 1$. Calcoliamo il raggio di convergenza. Posto

$$f(k) := \sqrt{\ln(k) + k^3 + 2^k} - \sqrt{2^k}$$

determiniamo il raggio di convergenza calcolando il limite

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \lim (f(k))^{1/k} = \lim_k \left(2^{k/2} \left(\sqrt{1 + \frac{k^3}{2^k} + \frac{\ln(k)}{2^k}} - 1 \right) \right)^{1/k} \\
&= \sqrt{2} \lim_k \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k^3 + \ln(k)}{2^k} + o\left(\frac{1}{2} \frac{k^3 + \ln(k)}{2^k} \right) - 1 \right)^{1/k} \\
&= \sqrt{2} \lim_k \left(\frac{k^3}{2^{k+1}} \right)^{1/k} (1 + o(1)) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Quindi il **raggio di convergenza é** $\boxed{r = \sqrt{2}}$.

Quindi si ha **convergenza assoluta, quindi anche semplice, nell'intervallo** $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$. Abbiamo **convergenza uniforme** in ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

La serie **non converge sulla frontiera** dell'intervallo $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$. Infatti, sd esempio, per $x = 1 + \sqrt{2}$ usando la stessa approssimazione di prima, i termini della serie diventano

$$f(k)\, 2^{k/2} = 2^{k/2} \left(\sqrt{\ln(k) + k^3 + 2^k} - \sqrt{2^k} \right) = 2^{k/2} \left(2^{k/2} \frac{k^3}{2^k} (1 + o(1)) \right) = k^3 (1 + o(1)) \ .$$

Quindi la serie non puó convergere in quanto $f(k)\, 2^{k/2} = k^3(1 + o(1)) \to \infty$. Lo stesso discorso vale per $x = 1 - \sqrt{2}$ anche se la serie è in questo caso a termini di segno alterno.

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica - 15 Febbraio 2016
Soluzione della Versione A

1) Data la funzione

$$f(x) := yx^2 + 2xy^2$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Trovare massimo e minimo assoluto di* f *nella regione* $K := \{0 \le x \le 1 \ , \ -x \le y \le -x^2\}$

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2yx + 2y^2 \\ x^2 + 4xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y(x+y) \\ x(x+4y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0 \ , \ y = 0$$

Quindi l'unico punto critito è l'origine $(0,0)$. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+4y \\ 2x+4y & 4x \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi l'informazione contenuta nel punto $(0,0)$ non è sufficiente a stabilire la natura del punto critico. Tuttavia, si osservi che $f(0,0) = 0$ e che sulla retta $y = -x$, passante per l'origine, la funzione vale $f(x,-x) = -x^3 + 2x^3 = x^3$ che cambia segno in ogni intorno di $x = 0$; quindi $f(x,y)$ cambia segno in ogni intorno di $(0,0)$ ossia $(0,0)$ **è un punto di sella**.

2.) Si osservi che l'insiem K è chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette in K massimo e minimo assoluto. Abbiamo già osservato che f non ha max e min relativi su $\mathbb{R}^2$. Quindi studiamo la funzione f sulla frontiera ∂K del vincolo K. La frontiera è formata da due curve

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \ , \ t \in [0,1] \quad ; \quad \gamma_2(t) := \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix} \ , \ t \in [0,1]$$

che si incontrano nei punti $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (1,-1)$. Questi punti non regolari del vincolo. Quindi studieremo i punti estremali di f sulle curve e poi li confronteremo con i valori di f sui punti P_1 e P_2.

$\boxed{\boldsymbol{f(\gamma_1)}}$ Valutando f su γ_1 si ha $f(\gamma_1(t)) = -t^3 + 2t^3 = t^3$ che non ha ne punti di massimo ne di minimo.

$\boxed{\boldsymbol{f(\gamma_2)}}$ Valutando f su γ_2 si ha $f(\gamma_2(t)) = -t^4 + 2t^5$. Studiamo la derivata prima

$$f(\gamma_2(t))' = -4t^3 + 10t^4 = 2t^3(5t-2) = 0 \iff t = 0 \ , \ t = 2/5$$

A noi interessano solo i valori compresi nell'intervallo $(0,1)$ (gli estremi sono punti di non regolarità. Quindi l'unico punto di interesse è $t = 2/5$. Studiando il segno si deduce che $t = 2/5$ è un punto di minimo locale della funzione sul vincolo, in particolare $f(\gamma_2(2/5)) = f(2/5, -4/25) = -\frac{16}{5^5}$. Valutando infine la funzione sui punti non regolari del vincolo si ha $f(0,0) = 0$ e $f(1,-1) = 1$. Quindi

$$(2/5, -4/25) \ \ \textbf{minimo assoluto} \ ; \ (1,-1) \ \ \textbf{massimo assoluto} \ .$$

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{-2xy^2 + 4y^2}{-x^2 + 4x + 5}\, dx + 2y \ln(-x^2 + 4x + 5)\, dy$$

Calcolare l'integrale di ω *lungo la curva* γ *definita* $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ \ln(t+1) \end{pmatrix}$ *per* $t \in [0, 1]$.

Svolgimento Come prima cosa studiamo il dominio della forma differenziale. Si vede facilmente che il dominio è definito dalla consizione che l'argomendo del logaritmo sia > 0. Allora

$$-x^2 + 4x + 5 > 0 \iff -(x+1)(x-5) > 0 \iff x \in (-1, 5)$$

Quindi il dominio di omega è l'insieme dei punti $(x, y) \in (-1, 5) \times \mathbb{R}$ che è convesso e quindi semplicemente connesso. Andiamo a vedere se la forma differenziale è chiusa (quindi esatta per quanto appena osservato) sul dominio. Indicando con $a_1(x, y)$ ed $a_2(x, y)$ la prima e la seconda componente della forma differenziale osserviamo che

$$\partial_y a_1(x, y) = \partial_y \frac{-2xy^2 + 4y^2}{-x^2 + 4x + 5} = \frac{-4xy + 8y}{-x^2 + 4x + 5} = \partial_x 2y \ln(-x^2 + 4x + 5) = \partial_x a_2(x, y)$$

Quindi la forma differenziale è esatta. Calcoliamo una primitiva di ω

$$\partial_x f(x, y) = a_1(x, y) = \frac{-2xy^2 + 4y^2}{-x^2 + 4x + 5}$$

Da cui

$$f(x, y) = y^2 \int \frac{-2x + 4}{-x^2 + 4x + 5} + h(y) = y^2 \ln(-x^2 + 4x + 5) + h(y)$$

Imponiamo ora la seconda condizione

$$\partial_y f(x, y) = 2y \ln(-x^2 + 4x + 5) + \partial_y h(y) = a_2(x, y) = 2y \ln(-x^2 + 4x + 5)$$

da segue che possiamo scegliere $h = 0$. Quindi una primitiva di ω è la funzione

$$\boxed{f(x, y) = y^2 \ln(-x^2 + 4x + 5)\ .}$$

In conclusione osservando che la curva gamma è supportata all'interno del dominio di definizione di ω si ha

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \ln^2(2) \ln(8) = 3 \ln^3(2)\ .$$

3) Calcolare l'area della superficie S di equazione parametrica

$$S(t,s) := \begin{pmatrix} t \\ s \\ s+1 \end{pmatrix} \quad , \quad t \leq s \leq 2t \ , \ 1-t \leq s \leq 2-t \ .$$

Svolgimento Calcoliamo il versore normale:

$$\partial_t S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \partial_s S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad N_S = \partial_t S \wedge \partial_s S = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$Area(S) = \int_{\{t \leq s \leq 2t \ , \ 1-t \leq s \leq 2-t\}} \|N_S(t,s)\| \, dtds = \int_{\{t \leq s \leq 2t \ , \ 1-t \leq s \leq 2-t\}} \sqrt{2} \, dtds$$

Eseguendo il cambio di variabili $u := s/t$ e $v := s+t$, il dominio di integrazione diventa $u \in [1,2]$ e $v \in [1,2]$. Calcoliamo s,t in funzione di u e v e quindi la matrice Jacobiana. Dalla seconda equazione $s = v - t$ che sostituita nella prima da $u = v/t - 1$ quindi

$$t = \frac{v}{u+1} \quad , \quad s = v - \frac{v}{u+1} = \frac{uv}{u+1} \quad \Rightarrow \quad J(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \\ \frac{v}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$|det(J(u,v))| = \left| -\frac{uv}{(u+1)^3} - \frac{v}{(u+1)^3} \right| = \frac{v}{(u+1)^2} \ .$$

A questo punto il calcolo dell'area diventa

$$Area(S) = \int_1^2 dv \int_1^2 du \sqrt{2} \frac{v}{(u+1)^2} = \sqrt{2} \int_1^2 dvv \int_1^2 du \frac{1}{(u+1)^2} = \sqrt{2} \frac{v^2}{2} \Big|_1^2 \cdot \frac{-1}{u+1} \Big|_1^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

4) Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ dove $\vec{F_1} = (2xyz, x^2z, x^2y)$ e $\vec{F_2} = (y,0,0)$. Calcolare il flusso del rotore $\mathrm{rot}(\vec{F})$ *di $\vec{F}$, attraverso la surperficie di equazione $z^2 + 4y^2 + x^2 = 1$, con $z \geq 0$, orientata in modo tale che la terza componente del vettore normale sia positiva.*

Svolgimento. Usando la linearitá del rotore si ha

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \mathrm{rot}(\vec{F_1}) + \mathrm{rot}(\vec{F_2}) = \mathrm{rot}(\vec{F_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in quanto il rotore di $\vec{F_1}$ é uguale al vettore nullo. A qeusto punto possiamo calcolare il flusso del rotore attarverso S direttamente oppure possiamo applicare il teorema di Stokes e osservare che

$$\phi_S(\vec{F}) = \phi_S(\vec{F_2}) = \int_{\partial S^+} \vec{F_2}$$

dove ∂S^+ Ía frontiera di S orientata positivamente rispetto all'rientamento dato su S. Ora S é una porzione di ellissoide orientata in modo tale che la terza componente del vettore normale sia positiva. La frontiera di S é l'ellisse di equazione $4y^2 + x^2 = 1$. In base all'orientazione si S si deduce che l'orientamento da scegliere nella parametrizzazione dell'ellisse é quello che la vede percora in senso antiorario. Per descrivere l'ellisse usiamo il sistema di coordinate $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho/2\sin(\theta)$, e $z = 0$ da cui si ottiene $\rho = 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Quindi

$$\partial S^+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ (1/2)\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\partial S}^+ = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ (1/2)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\int_{\partial S^+} \vec{F}_2 = \int_0^{2\pi} \left\langle \vec{F}_2(\theta), \dot{\partial S}^+ \right\rangle d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\, d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

5) Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{1 + 2^k k^2 \ln^2(k)} \right) (x-4)^k \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiare la convergenza semplice, assoluta ed uniforme.

Svolgimento Si tratta di una serie di pontenze centrata in $x = 4$. Calcoliamo il raggio di convergenza

$$\frac{1}{r} = \lim_k \left| \frac{k}{1 + 2^k k^2 \ln^2(k)} \right|^{1/k} = \lim_k \left(\frac{1}{2^k k \ln^2(k)} \right)^{1/k} (1 + o(1))^{1/k} = \frac{1}{2}$$

Quindi la serie converge semplicemente ed assolutamente in $(2, 6)$ e uniformemente in $[a, b] \subset (2, 6)$ per ogni $a > 2$ e $b < 6$.

Per $\boxed{\boldsymbol{x = 6}}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k2^k}{1+2^k k^2 \ln^2(k)} \right)$ che è a termini positivi. Osservando che per $k \to +\infty$

$$\frac{k2^k}{1 + 2^k k^2 \ln^2(k)} = \frac{1}{k \ln^2(k)}(1 + o(1)) \ ,$$

per confronto asintotico e per il confronto integrale la serie converge.

Per $\boxed{\boldsymbol{x = 2}}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k2^k}{1+2^k k^2 \ln^2(k)} \right) (-1)^k$ che è a termini di segno alterno. Tuttavia passando al modulo, per quanto visto nel caso $x = 6$ si ha convergenza assoluta.

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \ln(e^{-x^2+x} + 1/2) \ .$$

Dopo aver discusso le condizioni di esistenza ed unicità locale

1. *trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.*
2. *provare che le soluzioni massimali $\phi(t, x_0)$ sono globalmente definite per ogni dato iniziale $x(0) = x_0$ e calcolare i limiti $\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0)$ per $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Svolgimento 1.) L'argomento del logaritmo è sempre > 0 quindi il dominio di $f(x)$ è tutto $\mathbb{R}$. Inoltre la funzione $f(x)$ è composizione di funzioni C^∞. Quindi $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ e le condizioni di esistenza ed unicitá locale sono verificate.

I punti di equilibrio li otteniamo imponendo che l'argomento del logaritmo sia uguale ad 1:

$$e^{-x^2+x}+1/2 = 1 \iff e^{-x^2+x} = 1/2 \iff -x^2+x+\ln(2) = 0 \iff x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$$

Si osservi inoltre che $f(x) > 0$ per $x \in \left(\frac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}\right)$ e negativa altrimenti. Da cui si deduce **l'asintotica stabilità** del punto $\frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$ e **l'instabilità del punto** $\frac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$.

2.) La funzione $f(x)$ è limitata in quanto continua in $\mathbb{R}$ e perchè il limite per $x \to \pm\infty$ di $f(x)$ è uguale $-\ln(2)$. Per sublinearitá **le soluzioni massimali esistono globalmente**. Di conseguenza sappiamo che dato $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste $\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0)$ tale limite o è infinito oppure è un punto di equilibrio. Ora per il torema di esistenza ed unicità le soluzioni massimali sono confinate all'interno delgi intervalli delimitati dalle soluzioni stazionarie associate agli zeri di $f(x)$. Inoltre dato che in tali intervalli la funzione ha segno costante le soluzioni saranno monotone e quindi ammetteranno limite per $t \to +\infty$. In particolare

- $\boldsymbol{x_0 \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}\right)}$ la soluzione massimale risulta decrescente. L'unico risultato possibile è $\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0) = -\infty$.
- $\boldsymbol{x_0 \in \left(\frac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}\right)}$ la soluzione massimale è crescente e quindi l'unico risultato possibile è $\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0) = \frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$.
- $\boldsymbol{x_0 \in \left(\frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}, +\infty\right)}$ la soluzione massimale risulta decrescente e quindi l'unico risultato possibile è $\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0) = \frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$.

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica - 1 Febbraio 2016
Soluzione della Versione B

1) 1) Data la funzione

$$f(x) := -yx^2 - 4xy^2$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Trovare massimo e minimo assoluto di f nella regione $K := \{-1 \leq x \leq 0 \ , \ x^2 \leq y \leq -x\}$*

Svolgimento Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2yx - 4y^2 \\ -x^2 - 8xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y(x+4y) \\ -x(x+8y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0 \ , \ y = 0$$

Quindi l'unico punto critito è l'origine $(0,0)$. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x - 8y \\ -2x - 8y & -8x \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi l'informazione contenuta nel punto $(0,0)$ non è sufficiente a stabilire la natura del punto critico. Tuttavia, si osservi che $f(0,0) = 0$ e che sulla retta $y = -x$, passante per l'origine, la funzione vale $f(x,-x) = x^3 - 4x^3 = -3x^3$ che cambia segno in ogni intorno di $x = 0$; quindi $f(x,y)$ cambia segno in ogni intorno di $(0,0)$ ossia $(0,0)$ **è un punto di sella**.

2.) Si osservi che l'insiem K è chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette in K massimo e minimo assoluto. Abbiamo già osservato che f non ha max e min relativi su $\mathbb{R}^2$. Quindi studiamo la funzione f sulla frontiera ∂K del vincolo K. La frontiera è formata da due curve

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \ , \ t \in [-1,0] \quad ; \quad \gamma_2(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \ , \ t \in [-1,0]$$

che si incontrano nei punti $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (-1,1)$. Questi punti non regolari del vincolo. Quindi studieremo i punti estremali di f sulle curve e poi li confronteremo con i valori di f sui punti P_1 e P_2.

$\boxed{\boldsymbol{f(\gamma_1)}}$ Valutando f su γ_1 si ha $f(\gamma_1(t)) = t^3 - 4t^3 = -3t^3$ che non ha ne punti di massimo ne di minimo.

$\boxed{\boldsymbol{f(\gamma_2)}}$ Valutando f su γ_2 si ha $f(\gamma_2(t)) = -t^4 - 4t^5$. Studiamo la derivata prima

$$f(\gamma_2(t))' = -4t^3 - 20t^4 = -4t^3(1+5t) = 0 \iff t = 0 \ , \ t = -1/5$$

A noi interessano solo i valori compresi nell'intervallo $(-1,0)$ (gli estremi sono punti di non regolarità). Quindi l'unico punto di interesse è $t = -1/5$. Studiando il segno si deduce che $t = -1/5$ è un punto di minimo locale della funzione sul vincolo, in particolare $f(\gamma_2(-1/5)) = f(-1/5, 1/25) = -\frac{1}{5^5}$. Valutando infine la funzione sui punti non regolari del vincolo si ha $f(0,0) = 0$ e $f(-1,1) = 3$. Quindi

$$(-1/5, 1/25) \ \textbf{minimo assoluto} \ ; \ (-1,1) \ \textbf{massimo assoluto} \ .$$

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{-xy+y}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\,dx + \sqrt{-x^2+2x+8}\,dy$$

Calcolare l'integrale di ω *lungo la curva* γ *definita* $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t+1} \end{pmatrix}$ *per* $t \in [0,1]$.

Svolgimento. Come prima cosa studiamo il dominio della forma differenziale. Affinchè tutte e due le componenti della forma differenziale $a_1(x,y)$ ed $a_2(x,y)$ siano ben definite è necessario e sufficiente che l'argomendo della radice sia > 0. Allora

$$-x^2+2x+8>0 \iff -(x+2)(x-4)>0 \iff x \in (-2,4)$$

Quindi il dominio di omega è l'insieme dei punti $(x,y) \in (-2,4) \times \mathbb{R}$ che è convesso e quindi semplicemente connesso. Andiamo a vedere se la forma differenziale è chiusa (quindi esatta per quanto appena osservato) sul dominio. Osserviamo che

$$\partial_y a_1(x,y) = \partial_y \frac{-xy+y}{\sqrt{-x^2+2x+8}} = \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+8}} = \partial_x \sqrt{-x^2+2x+8} = \partial_x a_2(x,y)$$

Quindi la forma differenziale è esatta. Calcoliamo una primitiva di ω

$$\partial_x f(x,y) = a_1(x,y) = \frac{-xy+y}{\sqrt{-x^2+2x+8}}$$

Da cui

$$f(x,y) = y \int \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+8}} + h(y) = y\sqrt{-x^2+2x+8} + h(y)$$

Imponiamo ora la seconda condizione

$$\partial_y f(x,y) = \sqrt{-x^2+2x+8} + \partial_y h(y) = a_2(x,y) = \sqrt{-x^2+2x+8}$$

da segue che possiamo scegliere $h = 0$. Quindi una primitiva di ω è la funzione

$$\boxed{f(x,y) = y\sqrt{-x^2+2x+8}\ .}$$

In conclusione osservando che la curva gamma è supportata all'interno del dominio di definizione di ω si ha

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \sqrt{2}\ .$$

3) Calcolare l'area della superficie S di equazione parametrica

$$S(t,s) := \begin{pmatrix} t \\ s-1 \\ s \end{pmatrix} \quad , \quad t \le s \le 3t \ , \ 1-t \le s \le 2-t \ .$$

Svolgimento Calcoliamo il versore normale:

$$\partial_t S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \partial_s S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad N_S = \partial_t S \wedge \partial_s S = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$Area(S) = \int_{\{t\le s\le 2t \ , \ 1-t\le s\le 2-t\}} \|N_S(t,s)\| \, dtds = \int_{\{t\le s\le 2t \ , \ 1-t\le s\le 2-t\}} \sqrt{2}\, dtds$$

Eseguendo il cambio di variabili $u := s/t$ e $v := s+t$, il dominio di integrazione diventa $u \in [1,3]$ e $v \in [1,2]$. Calcoliamo s,t in funzione di u e v e quindi la matrice Jacobiana. Dalla seconda equazione $s = v - t$ che sostituita nella prima da $u = v/t - 1$ quindi

$$t = \frac{v}{u+1} \quad , \quad s = v - \frac{v}{u+1} = \frac{uv}{u+1} \ \Rightarrow \ J(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \\ \frac{v}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$|det(J(u,v))| = \left| -\frac{uv}{(u+1)^3} - \frac{v}{(u+1)^3} \right| = \frac{v}{(u+1)^2} \ .$$

A questo punto il calcolo dell'area diventa

$$Area(S) = \int_1^2 dv \int_1^3 du \frac{v\sqrt{2}}{(u+1)^2} = \int_1^2 dvv \int_1^2 du \frac{\sqrt{2}}{(u+1)^2} = \left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{-\sqrt{2}}{u+1}\right]_1^3 = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

4) Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ dove $\vec{F_1} = (yz^2, xz^2, 2xyz)$ e $\vec{F_2} = (0, x, 0)$. Calcolare il flusso del rotore $\mathrm{rot}(\vec{F})$ *di $\vec{F}$, attraverso la surperficie di equazione $z^2 + y^2 + 4x^2 = 1$, con $z \ge 0$, orientata in modo tale che la terza componente del vettore normale sia positiva.*

Svolgimento. Usando la linearità del rotore si ha

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \mathrm{rot}(\vec{F_1}) + \mathrm{rot}(\vec{F_2}) = \mathrm{rot}(\vec{F_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in quanto il rotore di $\vec{F_1}$ è uguale al vettore nullo. A qeusto punto possiamo calcolare il flusso del rotore attarverso S direttamente oppure possiamo applicare il teorema di Stokes e osservare che

$$\phi_S(\vec{F}) = \phi_S(\vec{F_2}) = \int_{\partial S^+} \vec{F_2}$$

dove ∂S^+ è la frontiera di S orientata positivamente rispetto all'orientamento dato su S. Ora S è il semiellissoide orientato in modo tale che la terza componente del vettore normale sia positiva. La frontiera di S è l'ellisse di equazione $y^2 + 4x^2 = 1$. In base all'orientazione si S si deduce che l'orientamento da scegliere nella parametrizzazione dell'ellisse è quello che la vede percorsa in senso antiorario. Per descrivere l'ellisse usiamo il sistema di coordinate $x = \rho/2\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, e $z = 0$ da cui si ottiene $\rho = 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Quindi

$$\partial S^+ = \begin{pmatrix} (1/2)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\partial S}^+ = \begin{pmatrix} -(1/2)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\int_{\partial S^+} \vec{F}_2 = \int_0^{2\pi} \left\langle \vec{F}_2(\theta), \dot{\partial S}^+ \right\rangle d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

5) Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(k)}{1 + 3^k k \ln^3(k)} \right) (x-2)^k \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiare la convergenza semplice, assoluta ed uniforme.

Svolgimento Si tratta di una serie di pontenze centrata in $x = 2$. Calcoliamo il raggio di convergenza

$$\frac{1}{r} = \lim_k \left| \frac{\ln(k)}{1 + 3^k k \ln^3(k)} \right|^{1/k} = \lim_k \left(\frac{1}{3^k k \ln^2(k)} \right)^{1/k} (1 + o(1))^{1/k} = \frac{1}{3}$$

Quindi la serie converge semplicemente ed assolutamente in $(-1, 5)$ e uniformemente in $[a, b] \subset (-1, 5)$ per ogni $a > -1$ e $b < 5$.

Per $\boxed{\boldsymbol{x = 5}}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^k \ln(k)}{1+3^k k \ln^3(k)} \right)$ che è a termini positivi. Osservando che per $k \to +\infty$

$$\frac{3^k \ln(k)}{1 + 3^k k \ln^3(k)} = \frac{1}{k \ln^2(k)}(1 + o(1)) \ ,$$

per confronto asintotico e per il confronto integrale la serie converge.

Per $\boxed{\boldsymbol{x = -1}}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^k \ln(k)}{1+3^k k \ln^3(k)} \right) (-1)^k$ che è a termini di segno alterno. Tuttavia passando al modulo, per quanto visto nel caso $x = 5$ si ha convergenza assoluta.

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \ln(e^{-x^2-x} + 1/2) \ .$$

Dopo aver discusso le condizioni di esistenza ed unicità locale

- *trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.*
- *provare che le soluzioni massimali $\phi(t, x_0)$ sono globalmente definite per ogni dato iniziale $x(0) = x_0$ e calcolare i limiti $\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0)$ per $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Svolgimento 1.) L'argomento del logaritmo è sempre > 0 quindi il dominio è $\mathbb{R}$. Inolte $f(x)$ è composizione di funzioni C^∞. Quindi $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ e le condizioni di esistenza ed unicitá locale sono verificate.

I punti di equilibrio li otteniamo imponendo che l'argomento del logaritmo sia uguale ad 1:

$$e^{-x^2-x}+1/2 = 1 \iff e^{-x^2-x} = 1/2 \iff -x^2-x+\ln(2) = 0 \iff x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$$

Si osservi inoltre che $f(x) > 0$ per $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}\right)$ e negativa altrimenti. Da cui si deduce **l'asintotica stabilità** del punto $\frac{-1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$ e **l'instabilità del punto** $\frac{-1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$.

2.) La funzione $f(x)$ è limitata in quanto continua in $\mathbb{R}$ e perchè il limite per $x \to \pm\infty$ di $f(x)$ è uguale $-\ln(2)$. Per sublinearitá **le soluzioni massimali esistono globalmente**. Di conseguenza sappiamo che dato $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste $\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0)$ tale limite o è infinito oppure è un punto di equilibrio. Ora per il torema di esistenza ed unicità le soluzioni massimali sono confinate all'interno delgi intervalli delimitati dalle soluzioni stazionarie associate agli zeri di $f(x)$. Inoltre dato che in tali intervalli la funzione ha segno costante le soluzioni saranno monotone e quindi ammetteranno limite per $t \to +\infty$. In particolare:

- $\boldsymbol{x_0 \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}\right)}$ la soluzione massimale risulta decrescente. L'unico risultato possibile è $\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0) = -\infty$.
- $\boldsymbol{x_0 \in \left(\frac{-1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}\right)}$ la soluzione massimale è crescente e quindi l'unico risultato possibile è $\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0) = \frac{-1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$.
- $\boldsymbol{x_0 \in \left(\frac{-1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}, +\infty\right)}$ la soluzione massimale risulta decrescente e quindi l'unico risultato possibile è $\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0) = \frac{-1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$.

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 15 Febbraio 2017

1) Data la funzione

$$f(x) := x^4 - 8x^2y + 4xy^2$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Determinare e classificare gli estremi della funzione nella regione $E := \{x \leq 1\}$.*

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 - 16xy + 4y^2 \\ -8x^2 + 8xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 - 16xy + 4y^2 \\ 8x(-x + y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

Dalla seconda equazione otteniamo $x = 0$ che, sostituita nella prima, da $y = 0$. Quindi un primo punto critivo è il punto $(0, 0)$. Sempre dalla seconda equazione otteniamo $y = x$ che sostituita nella prima equazione da

$$4x^3 - 16x^2 + 4x^2 = 4x^2(x - 3) = 0 \iff x = 0 \ , \ x = 3 \ \Rightarrow \ (0, 0) \ , \ (3, 3) \ .$$

In conclusione i punti critici della funzione sono i punto $(0, 0)$ e $(3, 3)$. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 16y & -16x + 8y \\ -16x + 8y & 8x \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(3, 3) = \begin{pmatrix} 4(27 - 12) & -48 + 24 \\ -48 + 24 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & -24 \\ -24 & 24 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che $(3, 3)$ **è un minimo relativo** in quanto $det(H_f(3, 3)) > 0$ e $H_f(3, 3)_{1,1} = 60 > 0$ ossia $H_f(3, 3)$ è definita positiva. Invece

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi l'informazione contenuta nel punto $(0, 0)$ non è sufficiente a stabilire la natura del punto critico. Tuttavia se andiamo restringiamo la funzione sulla retta $y = x$, si osserva che

$$f(x, x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4)$$

che risulta

$$f(x, x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \ ; \ f(x, x) < 0 \iff x \in (0, 4)$$

quindi si ha un cambiamento di segno in ogni intorno di $(0, 0)$ che risulta **un punto di sella**.

2.) L'insieme E non è limitato. Quindi la funzione può non avere massimi e minimi assoluti. Nella regione $x < 1$ già sappiamo che $(0, 0)$ è un punto di sella. Rimane da studiare il comportamento sulla frontiera del vincolo, ossia $x = 1$. Si osservi che $f(1, y) = 4y^2 - 8y + 1$ e

$$f'(1, y) = 8(y - 1) = 0 \iff y = 1$$

l'analisi del segno

$$f'(1, y) = 8(y - 1) > 0 \iff y > 1 \ .$$

Quindi il punto $y = 1$ è un minimo relativo della funzione ristretta alla retta $x = 1$. Per capire se si tratta di una massimo relativo della funzione sull'insieme E studiamo il gradiente della funzione nel punto di $(1, 1)$:

$$\nabla f\,(1,1) = \begin{pmatrix} 4 - 16 + 4 \\ -8 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In conclusione $\nabla f\,(-1, 1)$ è diretto verso l'interno di E. Quindi $(-1, 1)$ **è un minimo relativo della funzione ristretta all'insieme** E.

Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{-2y}{xy-9}\,dx + \frac{-2x}{xy-9}\,dy$$

Calcolare gli integrali $\int_{\gamma_1}\omega$, $\int_{\gamma_2}\omega$ *lungo le seguenti curve*

$$\gamma_1(t) := \begin{pmatrix} t+9 \\ t^2+2 \end{pmatrix} \ ; \ \gamma_2(t) := \begin{pmatrix} \sin(\pi t/4) \\ \cos(\pi t/4) \end{pmatrix}$$

con $t \in [0,1]$

Svolgimento La forma differenzial ̀definita in nell'insieme $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{xy-9=0\}$. Si osservi che l'insieme non è connesso ed è formato da tre componenti connesse

$$D_+ := \{y > \frac{9}{x}\ ,\ x>0\} \ \ ,\ \ D_0 := \{xy < 9\} \ \ ,\ \ D_- := \{y < \frac{9}{x}\ ,\ x<0\}$$

con $D+$ e D_- convessi mentre D_0 semplicemente connesso (non si sono lacune) ma non convesso. La forma differenziale risulta chiusa infatti

$$\partial_y a_1 = \partial_y \frac{-2y}{xy-9} = \frac{18}{(xy-9)^2} = \partial_x \frac{-2x}{xy-9} = \partial_y a_2$$

Andiamo a vedere se la forma differenziale è esatta. A tal proposito si ricordi che nel caso in cui il dominio non è connesso una forma differenziale è esatta se la restrizione alle componenti connesse è esatta, in altre parole se per ogni componente connessa la restrizione della forma alla componente connessa ammette una primitiva. Proviamo a calcolare una primitiva di ω:

$$\partial_x f = a_1 = \frac{-2y}{xy-9} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = -2\ln|xy-9| + h(y)$$

e

$$\frac{-2x}{xy-9} + \partial_y h(y) = \partial_y f = a_2 = \frac{-2x}{xy-9} \ \Rightarrow \ h(y) = cost\ .$$

Quindi data la funzione

$$\boxed{f(x,y) = -2\ln|xy-9|}$$

e posto

$$\begin{aligned} f_+(x,y) &:= -2\ln(xy-9)\ , \qquad (x,y) \in D_+ \\ f_-(x,y) &:= -2\ln(xy-9)\ , \qquad (x,y) \in D_- \\ f_0(x,y) &:= -2\ln(9-xy)\ , \qquad (x,y) \in D_0 \end{aligned}$$

si ha che f_+, f_- e f_0 sono delle primitive di ω quando ristretta a D_+, D_- e D_0 rispettivamente.

Per il calcolo degli integrali curvilinei osserviamo che la prima curva γ_1 appartiene alla regione D_+ quindi

$$\int_{\gamma_1} \omega = f_+(\gamma_1(1)) - f_+(\gamma_1(0)) = -2(\ln(30-9) - \ln(18-9)) = -2\ln(7/3)\ .$$

La seconda curva si trova nella regione D_0 quindi

$$\int_{\gamma_2} \omega = f_0(\gamma_1(1)) - f_0(\gamma_1(0)) = -2(\ln(9-1/2) - \ln(9)) = -2\ln(17/18)\ .$$

3) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (zx^4, y^3x, x^2)$ attraverso la superficie σ definita dall'equazione $z = (x^2 + 4y^2)^{1/4}$, $0 \le z \le 2$, orientata in modo tale che la terza componente del vettore normale sia negativa.

Svolgimento La superficie in forma parametrica risulta

$$\sigma(t,s) : \begin{pmatrix} t \\ s \\ (t^2+4s^2)^{1/4} \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \le t^2 + 4s^2 \le 16$$

Il vettore normale alla superficie risulta

$$\vec{N}_\sigma(s,t) = \partial_s\sigma(t,s) \wedge \partial_t\sigma(t,s) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2s\,(t^2+4s^2)^{-3/4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}t\,(t^2+4s^2)^{-3/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t\,(t^2+4s^2)^{-3/4} \\ 2s\,(t^2+4s^2)^{-3/4} \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Quindi il vettore normale è orientato coerentemente a quanto richiestao dal problema. Per calcolare il flusso conviene applicare il teorema della divergenza. Cominciamo osservando che

$$div(\vec{F}) = 4zx^3 + 3y^2x$$

è una funzione dispari rispetto alla variabile x. Per applicare il teorema della divergenza chiudiamo la superficie con il disco ellittico D definito

$$D = \{x^2 + 4y^4 = 16\ ,\ z = 2\}$$

con orientamento tale che la superficie $S = D \cup \sigma$ risulti una superficie chiusa orientata. In base all'orientamento che abbiamo su σ si ha che il vettore normale N_D a D deve avere terza componente positiva. L'orientamento risultante su S è diretto verso l'esterno di S. Quindi applicando il teorema della divergenza si ha

$$\int_{V_S} div(\vec{F})(x,y,z)dxdydz = \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle = \int_\sigma \left\langle \vec{F}, \vec{N}_\sigma \right\rangle + \int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle$$

dove

$$V_S := \{0 \le (x^2+4y^2)^{1/4} \le z\ ,\ 0 \le z \le 2\} .$$

Tuttavie V_S è simmetrico rispetto allo scambio $x \to -x$. Quindi in base a quanto osservato su $div(\vec{F})$ si ha

$$\int_{V_S} div(\vec{F})(x,y,z)dxdydz = 0 \ \Rightarrow \int_\sigma \left\langle \vec{F}, \vec{N}_\sigma \right\rangle = -\int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle$$

Allora si osservi che

$$D(t,s) : \begin{pmatrix} t \\ s \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \le t^2 + 4s^2 \le 16$$

Il vettore normale alla superficie risulta

$$\vec{N}_D(s,t) = \partial_t D(t,s) \wedge \partial_s D(t,s) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Quindi

$$\int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle = \int_{0 \le t^2+4s^2 \le 16} t^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \frac{1}{2}\rho^3 \cos^2(\theta) = 32\pi$$

dove si è eseguito il cambiamento di coordinate ellittiche $t = \rho\cos(\theta)$ e $y = \frac{1}{2}\rho\sin(\theta)$ che ha come matrice Jacobiana

$$J(\rho,\theta) = \left(\begin{array}{cc} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta)/2 & \rho\cos(\theta)/2 \end{array} \right) \quad , \quad |det(J(\rho,\theta))| = \frac{\rho}{2} \ .$$

In conclusione

$$\left\langle \vec{F}, \vec{N}_\sigma \right\rangle = -32\pi$$

4) Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\ln(k) + 1 + 4^k} - \sqrt{4^k} \right) x^k \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiarne, motivando le risposte, la convergenza semplice, assoluta ed uniforme.

Svolgimento Si tratta di una serie di pontenze centrata in $x = 0$. Si osservi che per $k \to \infty$ si ha

$$a_k := \left(\sqrt{\ln(k) + 1 + 4^k} - \sqrt{4^k} \right) = 2^k \left(\sqrt{1 + \frac{1 + \ln(k)}{4^k}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{\ln(k)}{2^k} (1 + o(1))$$

da cui segue facilmente il raggio di convergenza

$$\frac{1}{r} = \lim_k \left(\sqrt{\ln(k) + 1 + 4^k} - \sqrt{4^k} \right)^{1/k} = \lim_k \left(\frac{1}{2} \frac{\ln(k)}{2^k} (1 + o(1)) \right)^{1/k} = \lim_k \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(k)}{2} (1 + o(1)) \right)^{1/k} = \frac{1}{2}$$

Quindi il raggio di convergenza è $\boxed{r = 2}$ e la serie converge semplicemente ed assolutamente in $(-2, 2)$ e uniformemente in $[a, b] \subset (-2, 2)$.

Si vede facilmente che la serie non converge nei punti -2 e 2. Si noti infatti che per $x = 2$ usando lo sviluppo asintotico fatto all'inizio che

$$2^k \, a_k = 2^k \frac{1}{2} \frac{\ln(k)}{2^k} (1 + o(1)) = \frac{1}{2} \ln(k)(1 + o(1)) \ .$$

che diverge per $k \to \infty$. In maniera analoga si ve che per $x = -2$

$$(-2)^k a_k = (-1)^k \frac{1}{2} \ln(k)(1 + o(1))$$

che non ammette limite per $k \to +\infty$, quindi non può convergere.

5) Sia consideri l'equazione differenziale del terzo ordine

$$\dddot{x} - 4\dot{x} = 8t \ .$$

1. *Determinare la soluzione generale del sistema.*

2. *Determinare la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale* $\ddot{x}(0) = \dot{x}(0) = x(0) = 0$.

Svolgimento 1.) Il polinomio caratteristico associato all'equazione ha le seguenti radici

$$\lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4) = 0 \iff \lambda = 0, 2, -2$$

Quindi la soluzione dell'omogenea è

$$x_o(t) = A + Be^{2t} + Ce^{-2t}$$

Per calcolare una soluzione particolare procediamo per similitudine osservando che nel teremine noto è presente una radice del polinomio caratteristico ($\lambda = 0$) con molteplicità 1:

$$f(t) = 8t = 8te^{0\cdot t} \ .$$

Quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma $y(t) = t(K_1 + K_2 t)$. Sotituendo nell'equazione si ha

$$8t = \dddot{y} - 4\dot{y} = 0 - 4(K_1 + 2tK_2) \iff K_1 = 0 \ , \ K_2 = -1$$

Quindi la soluzione particolare è $y(t) = -t$ e la soluzione generalde del problema risulta

$$x_G(t) = A + Be^{2t} + Ce^{-2t} - t^2$$

2.) Risolviamo il problema di Cauchy imponendo le condizioni iniziali

$$x_G(0) = A + B + C = 0 \ , \ \dot{x}_G(0) = 2B - 2C = 0 \ , \ \ddot{x}_G(0) = 4B + 4C - 2 = 0$$

da cui si ottiene $A = -1/2$, $B = C = 1/4$ quindi

$$x_{Cauchy}(t) = \frac{1}{4}(-2 + e^{2t} + e^{-2t}) - t^2$$

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 19 Settembre 2016
Soluzioni

1) Data la funzione

$$f(x) := x^4 + y^4 + x^4 y$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Trovare massimo e minimo assoluto di f nella regione $K := \{x^2 \le y \le 1\}$.*

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione C^∞ definita su $\mathbb{R}^2$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4x^3 y \\ 4y^3 + x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3(1+y) \\ 4y^3 + x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (0,0) \ , \ (\pm\sqrt{2}, -1)$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 12x^2 y & 4x^3 \\ 4x^3 & 12y^2 \end{pmatrix} .$$

Si osservi che

$$H_f(\pm\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 4\sqrt{8} \\ \pm 4\sqrt{8} & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow det(H_f(\pm\sqrt{2}, -1)) = -18 < 0$$

Quindi **i punti** $(\pm\sqrt{2}, -1)$ **sono di sella**. Invece si oservi che $H_f(0,0) = 0$ è la matrice nulla. Si può dedurre che $(0,0)$è un punto di minimo osservando che

$$f(x,y) = y^4 + x^4(1+y) > 0 \quad , \quad y > -1$$

dato che il semipiano $y > -1$ contiene $(0,0)$ si deduce che $(0,0)$**è un punto di minimo relativo**.

2.) L'insieme K è chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette in K massimo e minimo assoluto. Il punto $(0,0)$ si trova sulla frontiera di K. Confronteremo questo punto con gli estremi della funzione vincolati alla frontiera di K che è una curva regolare a tratti formata dalle curve

$$\gamma_1 = \{y = x^2 \ , -1 \le x \le 1\} \quad , \quad \gamma_2 = \{y = 1 \ , -1 \le x \le 1\} \quad ,$$

con due punti singolari

$$(-1,1) \ , \ (1,1) \ .$$

Studiamo le restizioni di f sulle curve e confronteremo gli eventuali punti estremali trovati con i valori assunti dalla funzione sui tre punti singolari.

$\boxed{f \restriction \gamma_1}$ In tal caso si ha

$$h_1(x) := f(x,y) \restriction \gamma_1 = x^8 + x^6 + x^4 \ , \ -1 \le x \le 1 \ .$$

Si osservi che la derivata prima di h_1 per $x \in [-1,1]$ è sempre negativa

$$h_1'(x) = 8x^7 + 6x^5 + 4x^3 = 2x^3(4x^4 + 3x^2 + 2) \ .$$

Dato che $(4x^4 + 3x^2 + 2)$ non si annulla mai, gli zeri ed il segno della derivata prima di h_1 dipendono esclusivamente dal termine x^3. Si vede chiaramente che $x = 0$ (quindi $y = 0$) è un punto di minimo relativo (che avevamo già trovato prima dall'analisi degli estremi liberi di f. Quindi f presenta un minimo relativo sul vincolo γ_1 nel punto $(0, 0)$. In particolare $f(0, 0) = 0$

$\boxed{f \upharpoonright \gamma_2}$ In tal caso si ha

$$h_2(x) := f(x, y) \upharpoonright \gamma_2 = 2x^4 + 1 \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \ .$$

Non è necessario derivare h_2 in quanto sappiamo che questa funzione ha un solo punto estremale che si trova in $x = 0$ ($y = 1$)e si tratta di un minimo relativo. Quindi f presenta un minimo relativo sul vincolo γ_2 nel punto $(0, 1)$. In particolare $f(0, 1) = 1$

Infine per determinare max e min assoluti andiamo a confrontare i risultati ottenuti con i valori assunti dalla funzione sui punti singolari del vincolo:

$$f(-1, 1) = 3 = f(1, 1) \ .$$

Quindi $(1, 1)$ **e** $(-1, 1)$ **sono punti di massimo assoluto** e $(0, 0)$ **è un minimo assoluto**.

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + e^{xy} y \right) \, dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + e^{xy} x \right) \, dy \ ,$$

determinare, motivando le risposte, l'integrale $\int_\gamma \omega$ *dove* γ *è la spezzata che unisce i punti* $(0,-1)$, $(1,0)$ *e* $(0,1)$.

Svolgimento. La forma differenziale ω si può scomporre come somma di due forme differenziali $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dove

$$\omega_1 := e^{xy} y \, dx + e^{xy} x \, dy \quad , \quad \omega_2 := \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) dy \ ,$$

La forma differenziale ω_1 è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Si verifica facilmente che è chiusa e che è esatta. Una sua primitiva è la funzione $f_1(x,y) = e^{xy}$.

Al contrario la forma ω_2, definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è il ben noto esempio di forma chiusa ma non esatta.

Per il calcolo dell'integra si osservi che

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2 = f_1(0,1) - f_1(0,-1) + \int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma \omega_2$$

in quanto $f_1(0,1) = f(0,-1) = 1$. Per quanto riguarda l'ultimo integrale struttiamo l'invarianza omotopica di ω_2, in quanto chiusa:

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_\beta \omega_2 \quad , \quad \beta(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ sint \end{pmatrix} \ , \ t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Si noti infatti che $\gamma(0) = \beta(-\pi/2)$ e $\gamma(1) = \beta(\pi/2)$ e che si trovano tutte e due nella stessa parte si semipiano $x \geq 0$. Quindi si trova facilmente un insieme semplicemente connesso che le contiene, quindi sono omotope. In conclusione si vede facilmente che $\int_\beta \omega_1 = \pi$. In conclusione

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \pi}$$

3) Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{1} dy \, \left(e^{y^2} + \sin^5(x)\arctan(y)\right) \ .$$

Svolgimento. Il dominio di integrazione è simmetrico rispetto allo scambio $x \to -x$. Mentre la funzione e^{y^2} è pari rispetto all x la funzione $\sin^5(x)\arctan(y)$ è dispari. Quindi

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{1} dy \, \left(e^{y^2} + \sin^5(x)\arctan(y)\right) = \int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{1} dy \, e^{y^2} \ = 2\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{1} dy \, e^{y^2} \ .$$

Per calcolare l'integrale osservimo che non è possibile esprimere una primitiva di e^{y^2} in termini di funzioni elementari. Osserviamo però che il dominio è semplice anche rispetto alla variavile x Quindi

$$2\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{1} dy \, e^{y^2} = 2\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} dx \, e^{y^2} = 2\int_{0}^{1} dy \, e^{y^2} y = \left[e^{y^2}\right]_0^1 = e - 1$$

In conclusione

$$\boxed{\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{1} dy \, \left(e^{y^2} + \sin^5(x)\arctan(y)\right) = e - 1 \ .}$$

4) Dato il campo vettoriale $\vec{F} = (x^2, xy, zx)$ calcolare il flusso $\vec{F}$ attraverso la surperficie S di equazione $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ con $0 \le z \le \ln(5)$ orientata in modo tale che la terza componente del vettore normale sia positiva.

Svolgimento. L'idea è di calcolare il flusso del campo utilizzando il teorema della divergenza. Infatti osservado la definizione della superficie S, il dominio di integrazione della divergenza risulterà simmetrico rispetto allo scmabio $x \to -x$ e $y \to -y$ mentre $\mathrm{div}\vec{F} = 4x$ funzione dispari rispetto alla x. Di conseguenza il contributo della divergenza sarà zero.

Ciò premesso la superficie S in forma parametrica è $S(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ \ln(t^2 + s^2 + 1) \end{pmatrix}$ con $0 \le t^2 + s^2 \le 4$. Il vettore normale risulta

$$\partial_t S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2t}{t^2+s^2+1} \end{pmatrix} \quad , \quad \partial_s S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2s}{t^2+s^2+1} \end{pmatrix} \quad , \quad N_S(t,s) = \partial_t S \wedge \partial_s S = \begin{pmatrix} -\frac{2t}{t^2+s^2+1} \\ -\frac{2s}{t^2+s^2+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

che è coerente con l'orientazione richiesta. Quindi, in base a tale orientazione, il flusso entrante del campo.

Per applicare il teorema della divergenza chiudiamo la superficie con il disco di raggio 2 di equazioni parametriche $D(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ \ln(5) \end{pmatrix}$ con $0 \le t^2 + s^2 \le 4$. Il vettore normale alla superficie è pari a $N_D(t,s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, per cui per poter applicare il teorema della divergenza prenderemo il l'orientazione opposta di D. Per il teorema della divergenza abbiamo

$$\phi(\vec{F})_{S \cup D^-} = \phi(\vec{F})_S - \phi(\vec{F})_D = \int_{0 \le \ln(x^2+y^2+1) \le z \ ,0 \le z \le \ln(5)} \mathrm{div}(\vec{F}) = 0$$

Da cui

$$\phi(\vec{F})_S = \phi(\vec{F})_D = \int_{0 \le t^2+s^2 \le 4} \vec{F}(t,s,\ln(5)) \cdot N_D(t,s)\, dt\, ds = \ln(5) \int_{0 \le t^2+s^2 \le 4} s\, dt\, ds = 0$$

5) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 e^n}{n^3 e^n - 5n^6}(x-4)^n \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiarne la convergenza semplice, assoluta ed uniforme. Motivare le risposte.

Svolgimento Si tratta di una serie di potenze centrata in $x = 4$. Calcoliamo il raggio di convergenza. Posto

$$f(n) := \frac{n^2 e^n}{n^3 e^n - 5n^6} = \frac{1}{n - 5n^4 e^{-n}}$$

determiniamo il raggio di convergenza calcolando il limite

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \lim (f(n))^{1/n} = \lim_n \left(\frac{1}{n - 5n^4 e^{-n}} \right)^{1/n} \\ &= \lim_n \left(\frac{1}{n}(1 + o(1)) \right)^{1/n} (1 + o(1)) = 1 \end{aligned}$$

Quindi il **raggio di convergenza è** $\boxed{r = 1}$.

Quindi si ha **convergenza assoluta, quindi anche semplice, nell'intervallo** $(3, 5)$ e **convergenza uniforme** in ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset (3, 5)$.

Studiamo la convergesa della serie nei punti di frontiera $x = 5, 3$. Per $x = 5$ la serie diventa

$$\sum_n f(n)\, 1^n = \frac{1}{n - 5n^4 e^{-n}} = \frac{1}{n}(1 + o(1))$$

che per confronto asintotico con la serie armonica $1/n$ **non converge**. In maniera analoga per $x = 3$ si ha

$$\sum_n f(n)\, (-1)^n = \frac{(-1)^n}{n - 5n^4 e^{-n}}$$

una serie a termini di segno alterno che non converge assolutamente in quanto asintotica alla srie armonica. Studiamo la convergenza semplice applicando Leibniz. Chiaramente $f(n) \to 0$. Studiamo la monotonia derivando la funzione $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1 - 20x^3 e^{-x} + 5n^4 e^- x}{(x - 5x^4 e^{-x})^2}$$

Il segno della derivata prima dipende esclusivamente dal numeratore. Si osservi che per $x \to +\infty$ si ha che il numeratore tende a -1. Da questo segue che $f(k)$ è definitivamente descrescente. Quindi, per Leibniz, **la serie converge semplicemente in** $x = 3$.

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica - 23 Giugno 2016
Soluzioni

1) Data la funzione

$$f(x) := 2y^3 + 8yx^2 - 8y$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*

2. *Trovare massimo e minimo assoluto di f nella regione $K := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.*

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 16yx \\ 6y^2 + 8x^2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} (0, \pm 2/\sqrt{3}) \\ (\pm 1, 0) \end{matrix}$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 16y & 16x \\ 16x & 12y \end{pmatrix} .$$

Quindi

$$H_f(0, \pm 2/\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} \pm\frac{32y}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \pm\frac{24y}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad , \quad H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 16 \\ \pm 16 & 0 \end{pmatrix} .$$

Da cui segue che $(0, 2/\sqrt{3})$ è un **minimo relativo**, mentre $(0, -2/\sqrt{3})$ è un **massimo relativo**; mentre i punti $(\pm 1, 0)$ sono di **sella** in quanto il determinante è negativo.

2.) Si osservi che l'insiem K è chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette in K massimo e minimo assoluto. Abbiamo già osservato che f non ha max e min relativi su $\mathbb{R}^2$. Si osservi che i punti $(0, \pm 2/\sqrt{3})$ che sono di massimo e minimo relativo **non ricadono** all'interno di K. Vediamo cosa accade sulla frontiera ∂K di K: $x^2 + y^2 = 1$. Il comportamento della funzione sulla frontiera si ottiene osservando che $x^2 = 1 - y^2$ con $-1 \leq y \leq 1$ che sostituita nella nella unzione da

$$f \restriction \partial K = 2y^3 + 8y(1 - y^2) - 8y = -6y^3 \quad , \quad -1 \leq y \leq 1 .$$

Chiaramente $-6y^3$ è decrescente in $[-1, 1]$, quindi in -1 avremo un massimo mentre in 1 avremo un minimo. Quindi $(0, -1)$ è di massimo sulla frontiera, mentre $(0, 1)$ ùn minimo sulla frontiera in particolare

$$f(0, -1) = 6 \quad , \quad f(0, 1) = -6 .$$

da cui segue che il **massimo assoluto** è il punto $(0, -1)$ mentre il **minimo assoluto** è il punto $(0, 1)$.

2) Data la forma differenziale

$$\omega_1 := e^{xy}(1+xy)\,dx + (x^2 e^{xy}+1)\,dy$$

1. *Dire, motivando le risposte, se* ω_1 *è una forma differenziale esatta e, in caso affermativo, calcolarne una primitiva.*
2. *Data la forma differenziale*

$$\omega_2 := (z+1)e^{xy}(1+xy)\,dx + (1-z)(x^2e^{xy}+1)\,dy + xy(z-1)dz$$

calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega_2$ *dove* γ *é la curva* $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t^3 \\ e^{(1-t)}-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *per* $t \in [0,1]$.

Svolgimento 1.) Osservando che il dominio di ω_1 è $\mathbb{R}^2$, quindi semplicemente connesso, e che ω_1 verifica le condizioni di chiusura

$$\boxed{\partial_y a_1(x,y) = \partial_y e^{xy}(1+xy) = e^{xy}(2x+x^2y) = \partial_x(x^2e^{xy}+1) = \partial_x a_2(x,y)\ ,}$$

(dove a_1 ed a_2 indicano le due componenti di ω_1) si ha che ω_1 è esatta. Calcolimo un primitiva f imponendo

$$\partial_y f = a_2(x,y) = (x^2e^{xy}+1) \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = xe^{xy} + y + h(x)$$

e

$$\partial_x f = e^{xy} + xye^{xy} + \partial_x h = a_1(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \ \Rightarrow \ h(x) = cost\ .$$

Scegliendo $h=0$, una primitiva di ω_1 è

$$\boxed{f(x,y) = xe^{xy} + y\ .}$$

2.) Si osservi che la forma ω_2 non verifica le condizioni di chiusura su $\mathbb{R}^3$. Tuttavia la curva su cui dobbiamo integrare la forma differenziale giace sul piano $z=0$ e qunidi

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_\beta \omega_1$$

dove beta è la curva $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t^3 \\ e^{(1-t)}-1 \end{pmatrix}$ per $t \in [0,1]$. Per cui dato che ω_1 è esatta si ha

$$\boxed{\int_\beta \omega_1 = f(\beta(1)) - f(\beta(0)) = 1-(e-1) = 2-e}$$

3) Calcolare l'integrale

$$\int_D \frac{y^2 e^{y^2}}{x^2}\, dxdy \ ,$$

dove $D := \{x \leq y \leq 2x \ , \ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \ , \ 0 \leq x\}$.

Svolgimento Eseguiamo un seguente cambiamento di variabile per riscrivere il dominio di integrazione in forma normale:

$$\begin{array}{ll} u := \frac{y}{x} \ , & 1 \leq u \leq 2 \ , \\ v := xy \ , & 1 \leq v \leq 2 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt{uv} \end{array}$$

Dove si è scelto la determinazione positiva della radice in quanto $x, y \geq 0$ nell'insieme D. Per completare il cambio di variabile nell'integrazione calcoliamo il modulo del determinate della matrice Jacobiana $J(x, y)$:

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2\sqrt{vu}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ |det(J(u,v)| = |-\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u}| = \frac{1}{2u} \ .$$

Quindi sostituendo ed integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_D \frac{y^2 e^{y^2}}{x^2}\, dxdy &= \int_1^2 du \int_1^2 dv\, u^2\, e^{uv}\, \frac{1}{2u} = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_1^2 dv\, u\, e^{uv} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 du\, [e^{uv}]_1^2 = \frac{1}{2}\int_1^2 du\, (e^{2u} - e^u) \\ &= \left[\frac{e^{2u}}{4} - \frac{e^u}{2}\right]_1^2 = \frac{e^4}{4} - \frac{3e^2}{4} + \frac{e}{2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{\int_D \frac{y^2 e^{y^2}}{x^2}\, dxdy = \frac{e^4}{4} - \frac{3e^2}{4} + \frac{e}{2} \ .}$$

4) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^2y, y^6x^5 - yx^2, zx^2)$ attraverso la surperficie S di equazione $z = (x^2 + y^2)$ con $0 \le z \le 1$ orientata in modo tale che la terza componente del vettore normale sia positiva.

Svolgimento. La superficie S è un paraboloide di rotazione. Per calcolare il flusso di $\vec{F}$ attraverso S, applichiamo il teorema della della divergenza: chiudiamo il parboloide S con la superficie S_1 definita dall'equazione $z = 1$, $0 \le x^2 + y^2 \le 1$ in modo da ottenere una superficie chiusa $S \cup S_1$. Ora il teorema della divergenza afferma che il flusso $\phi_{(S\cup S_1)^+}(\vec{F})$ del campo $\vec{F}$ uscente dalla superficie $S \cup S_1$ è uguale all'integrale della divergenza $\mathrm{div}(\vec{F})$ integrata all'interno del solido $V := \{0 \le z \le 1\ ,\ 0 \le x^2+y^2 \le z\}$ la cui frontiera è $S \cup S_1$. Dove $(S \cup S_1)^+$ è orientata in modo tale che il vettore normale sia diretto verso l'esterno della superficie. In particolare

$$\phi_{(S\cup S_1)^+}(\vec{F}) = \phi_{S^+}(\vec{F}) + \phi_{S_1^+}(\vec{F})$$

dove S^+ é la superficie orientata in modo tale che il vettore normale sia diretto verso l'esterno i.e. la terza componente è negativa; S_1^+ é orientata il modo che la terza componente è positiva. Ora si osservi che

$$\mathrm{div}\vec{F} = 2xy + 6y^5x^5 - x^2 + x^2 = 2xy + 6y^5x^5$$

è una funzione dispari nelle variabili x, y ed il dominio di integrazione V è simmetrico rispetto allo scambio $x \to -x$ e $y \to -y$. Di conseguenza

$$\int_V \mathrm{div}(\vec{F}) = 0 = \phi_{S^+}(\vec{F}) + \phi_{S_1^+}(\vec{F}) \ \Rightarrow\ \phi_{S^+}(\vec{F}) = -\phi_{S_1^+}(\vec{F})\ .$$

Quindi il flusso richiesto nel problema è dato dalla relazione

$$\phi_{S^-}(\vec{F}) = -\phi_{S^+}(\vec{F}) = \phi_{S_1^+}(\vec{F})$$

Il versore normale ad S_1^+ è il vettore $(0, 0, 1)$ quindi

$$\boxed{\phi_{S_1}(\vec{F}) = \int_{z=1,0\le x^2+y^2\le 1} x^2dxdy = \int_0^1 d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\theta\rho^2\cos^2(\theta) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta\frac{1-\cos(2\theta)}{2} = \frac{\pi}{4}}$$

5) Data la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k)}\right)(x^3-9)^k\ , \qquad x\in\mathbb{R}$$

studiarne la convergenza semplice, assoluta ed uniforme. Motivare le risposte.

Svolgimento Possiamo studiare la serie come una serie di potenze ponendo $y = x^3 - 9$; dopodiché otteniamo i risultati in funzione della x usando la relazione $x = \sqrt[3]{y+9}$.

Posto

$$f(k) := \left(\frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k)}\right) = \left(\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)}\right)$$

determiniamo il raggio di convergenza calcolando il limite

$$\frac{1}{r} = \lim(f(k))^{1/k} = \lim_k \left(\frac{1}{k\ln(k)}\right)^{1/k}(1+o(1))^{1/k} = 1$$

Quindi la serie converge semplicemente ed assolutamente in $y\in(-1,1)$ e uniformemente in $[a,b]\subset(-1,1)$.

Per $\boxed{\boldsymbol{y=1}}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. Osservando che per $k\to+\infty$

$$f(k) = \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)} = \frac{1}{k\ln(k)}(1+o(1))\ ,$$

Allora per confronto asintotico con la serie $1/(k\ln(k))$ si ha che in $y=1$ la serie non converge.

Per $\boxed{\boldsymbol{y=-1}}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)(-1)^k$ ossia una serie a termini di segno alterno. Si osservi che $\lim_{k\to infty} f(k) = \lim_{k\to infty}\frac{1}{k\ln(k)}(1+o(1)) = 0$ e che

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\frac{\ln(x)}{1+x}-\frac{\ln(1+x)}{x}}{\ln^2(x)} < 0\quad ,\quad x>2\ .$$

Ossia $f(k)$ è una successione decresente. Quindi per il teorema di Leibniz si ha convergenza semplice (non assoluta) in $y=-1$.

Ritornando alla variabile x si ha:

- **convergenza assoluta** nell'intervallo $x\in(2,\sqrt[3]{10})$;
- **convergenza semplice** nell'intervallo $x\in(2,\sqrt[3]{10}]$;
- **convergenza uniforme** in ogni intervallo chiuso $[a,b]\subseteq(2,\sqrt[3]{10}]$.

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 26 Giugno 2017

1) Data la funzione

$$f(x) := x^2 + y^2 + x^2y + y^3$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Determinari estremi della funzione nella regione* $E := \{y^2 + x^2 \leq 1\}$.

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x + 2xy \\ 2y + x^2 + 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(1+y) \\ 2y + x^2 + 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

Dalla prima equazione otteniamo come soluzioni $x = 0$ e $y = -1$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda si ottiene:

$$2y + 3y^2 = 0 \iff y(2+3y) = 0 \iff y = 0 \ , \ y = -2/3$$

Quindi abbiamo i seguenti punti critici

$$(0,0) \ \ , \ \ (0,-2/3)$$

Sostituento $y = -1$ nella seconda equazione si ottiene $-2 + x^2 + 3 = 0$ che non ammette soluzione. Quindi gli unici punti critici della funzione sono quelli sopra indicati. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 2+6y \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad H_f(0,-2/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che $(0,0)$ **è un minimo relativo** in quanto gli autovalori della matrice sono positivi mentre il punto $(0,-2/3)$ è un **punto di sella** in quanto la matrice Hessiana ha due autovalori di segno opposto quindi non è definita.

2.) L'insieme E è chiuso e limitato ed f è chiaramente continua. Per il teorema di Weierstrass f avrà nell'insieme E massimo e minimo assoluto E. Dobbiamo solo studiare il comportamento f sulla frontiera ∂E di E in quanto abbiamo già osservato che f nella parte interna di E ha solo un minimo relativo nel punto $(0,0)$.

Possiamo applicare due metodi. **Moltiplicatori di Lagrange**. Cominciamo osservando che il vincolo $\partial E := \{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ è regolare in quanto il gradiente della funzione $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ non si annulla mai su ∂E. Definiamo la funzione di Lagrange

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) := x^2 + y^2 + x^2y + y^3 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

ed imponiamo l'annullamento del gradiente di $\mathscr{L}$:

$$\nabla\mathscr{L} = \begin{pmatrix} 2x + 2xy - 2\lambda x \\ 2y + x^2 + 3y^2 - 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x(1+y-\lambda) \\ 2y + x^2 + 3y^2 - 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dalla prima equazione si ha $x = 0$ e $y = \lambda - 1$. Sostituendo $x = 0$ nella terza equazioni si ottiene $y = \pm 1$. Sostituendo nella seconda equazione si ha

$$2 + 3 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = 5/2 \quad , \quad -2 + 3 + 2\lambda = 0 \iff \lambda = -1/2$$

Quindi i punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$ sono punti critici della funzione sul vincolo.

Imponiamo ora l'altra soluzione della prima equazione:$y = \lambda - 1$. Sostituendola nella seconda equazione si ha

$$2(\lambda - 1) + x^2 + 3(\lambda - 1)^2 - 2\lambda(\lambda - 1) = 0 \iff x^2 = (\lambda - 1)(-2 - 3(\lambda - 1) + 2\lambda) = -(\lambda - 1)^2$$

che ammette come unica possibile soluzione $\lambda = 1$ e $x = 0$. Da cui si deduce che $y = 0$ ma questa soluzione non è compatibile con il vincolo (terza equazione) $x^2 + y^2 = 1$. Quindi gli unici punti critici sul vincolo sono i punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$. In conclusione per determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione su E calcoliamo la funzione in $(0, 0)$ e nei punti critici di f su ∂E appena trovati:

$$f(0, 0) = 0 \quad , \quad f(0, 1) = 2 \quad , \quad f(0, -1) = 0$$

Quindi $(0, 1)$ **è un punto di max assoluto** mentre i punti $(0, 0)$ **e** $(0, -1)$ **sono di minimo assoluto**.

Secondo metodo (più veloce). Si osservi che la funzione $f(x)$ ristretta al vincolo diventa

$$g(y) := f_{\restriction \partial E}(y) = (y + 1) \ , \qquad -1 \leq y \leq 1$$

Chiaramente $y+1$ è strettamente crescente quindi ha minimo e massimo negli estremi dell'intervallo di definizione $y = -1$, $y = 1$ rispettivamente, cui corrispondono, i punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$ sul ∂E. Da qui in poi l'esercizio prosegue come prima.

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{2xzy^2}{x^2+1}\,dx \;+\; 2yz\ln(x^2+1)\,dy \;+\; y^2\ln(x^2+1)\,dz$$

a) Dire se la forma è chiusa ed in caso affermativo calcolarne una primitiva.

b) Calcolare gli integrali $\int_{\gamma_1}\omega$ e $\int_{\gamma_2}\omega$ dove γ_1 è il segmento che va dal punto $(0,1,0)$ al punto $(1,1,1)$ mentre γ_2 è la curva $\gamma_2(t) := e^{t(1-t)}\cdot(1-t,\,1,\,1-t)$ per $t\in[0,1]$.

Svolgimento a) Si tratta di una forma differenziale di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. La forma differenziale risulta chiusa infatti

$$\partial_y a_1 = \partial_y \frac{2xzy^2}{x^2+1} = \frac{4xzy}{x^2+1} = \partial_x 2yz\ln(x^2+1) = \partial_y a_2$$

$$\partial_z a_1 = \partial_z \frac{2xzy^2}{x^2+1} = \frac{2xy^2}{x^2+1} = \partial_x y^2\ln(x^2+1) = \partial_x a_3$$

$$\partial_z a_2 = \partial_z 2yz\ln(x^2+1) = 2y\ln(x^2+1) = \partial_y y^2\ln(x^2+1) = \partial_y a_3$$

Dal momento che il dominio di definizione $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso la forma differenziale è esatta. Calcoliamo una primitiva f impondendo che $df=\omega$:

$$\partial_x f = \frac{2xzy^2}{x^2+1} \;\Rightarrow\; f(x,y,z) = \int \frac{2xzy^2}{x^2+1}\,dx + h(y,z) \;\Rightarrow\; f(x,y,z) = zy^2\ln(x^2+1) + h(y,z)$$

Quindi

$$\partial_y f = 2zy\ln(x^2+1) + \partial_y h = a_2 = 2yz\ln(x^2+1) \;\Rightarrow\; \partial_y h(y,z) = 0 \iff h(y,z) = g(z)$$

Infine

$$\partial_z f = y^2\ln(x^2+1) + \partial_z g = a_3 = y^2\ln(x^2+1) \;\Rightarrow\; \partial_z g(z) = 0 \iff g(z) = costante$$

Quindi la funzione

$$\boxed{f = zy^2\ln(x^2+1)}$$

è una primitiva di ω.

b) Per calcolare gli integrali curvilinei è a questo punto sufficiente valutare la primitiva sugli estremi delle due curve:

$$\int_{\gamma_1}\omega = f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_1(0)) = f(1,1,1) - f(0,1,0) = \ln(2) - 0 = \ln(2)$$

Mentre

$$\int_{\gamma_2}\omega = f(\gamma_2(1)) - f(\gamma_2(0)) = f(0,1,0) - f(1,1,1) = 0 - \ln(2) = -\ln(2)$$

3) Si consideri la superficie $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 + 4y^2 = 1 \ , \ y \geq 0\}$. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} := (zx^2, x^2, z^2)$ attraverso la superficie S orientata in modo che la seconda componenete del vettore normale sia positiva.

Svolgimento Vogliamo applicare il teorema della divergenza. A tal proposito consideriamo la superficie chiusa

$$\Sigma := D \cup S \quad , \quad D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + z^2 \leq 1 \ , \ y = 0\}$$

ottenuta undendo ad S il disco D ed il cui vettore normale è

$$\vec{N}_\Sigma(x,y,z) = \begin{cases} \vec{N}_D(x,y,z) & (x,y,z)z \in D \\ \vec{N}_S(x,y,z) & (x,y,z)z \in S \end{cases}$$

Il teorema della divergenza afferma che

$$\int_{V(\Sigma)} \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)\, dxdydz = \int_\Sigma \left\langle \vec{F}, \vec{N}_\Sigma \right\rangle = \int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle + \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle$$

dove $\vec{N}_\Sigma$, quindi $\vec{N}_D$ e $\vec{N}_S$, deve essere orientato in nel verso uscente dalla superficie, mentre $V(\Sigma) = \{(z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + z^2 + 4y^2 \leq 1 \ , \ 0 \leq y\}$. Si osservi che la divergenza del campo

$$\mathrm{div}\vec{F} = 2xz + 2z$$

è una funzione dispari rispetto allo scambio $z \to -z$ e che il dominio di integrazione $V(\Sigma)$ risulta simmetrico rispetto allo scambio $z \to -z$. Di conseguenza

$$\int_{V(\Sigma)} \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)\, dxdydz = 0 = \int_\Sigma \left\langle \vec{F}, \vec{N}_\Sigma \right\rangle = \int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle + \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle$$

e

$$\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle = - \int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle$$

Quindi per calcolare il flusso di $\vec{F}$ attraverso S sarà sufficiente calcolare il flusso del campo attraverso il disco D (con gli orientamenti giusti). Scriviamo D in forma parametrica

$$D = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \ , \ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

i vettori tangenti saranno $\partial_x D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\partial_z D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ il vettore normale (orientato in modo tale che N_D ed N_S escano dalla superficie $\Sigma = D \cup S$ è

$$\vec{N}_D = \partial_x D \wedge \partial_z D = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda N_S si osservi che l'orientamento richieto dal problema (seconda componente positiva) è tale che N_D ed N_S escono dalla superficie. Quindi

$$\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle = - \int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle - \int_{0 \leq x^2 + z^2 \leq 1} -x^2 dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^3 \cos^2(\theta) = \frac{\pi}{4}$$

4) Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{k+\frac{1}{k}} - e^k\right) (x-4)^k \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiare la convergenza semplice, assoluta ed uniforme.

Svolgimento Si tratta di una serie di pontenze centrata in $x = 4$. Si osservi che per $k \to \infty$ si ha

$$a_k := \left(e^{k+\frac{1}{k}} - e^k\right) = e^k \left(e^{\frac{1}{k}} - 1\right) = \frac{e^k}{k}(1 + o(1))$$

da cui segue facilmente il raggio di convergenza

$$\frac{1}{r} = \lim_k \left(e^{k+\frac{1}{k}} - e^k\right)^{1/k} = \lim_k \left(\frac{e^k}{k}(1 + o(1))\right)^{1/k} = \lim_k e \left(\frac{1}{k}(1 + o(1))\right)^{1/k} = e$$

Quindi il raggio di convergenza è $\boxed{r = 1/e}$ e la serie converge semplicemente ed assolutamente in $(4 - 1/e, 4 + 1/e)$ e uniformemente in ogni $[a, b] \subset (4 - 1/e, 4 + 1/e)$.

Dallo sviluppo asintotico di a_k si vede facilmente che la serie **non converge** in $\boxed{x = 4 + 1/e}$. Si noti infatti che per $x = 4 + 1/e$ usando lo sviluppo asintotico fatto all'inizio si ha

$$a_k \cdot (4 + 1/e - 4)^k = \frac{e^k}{k}(1 + o(1))\frac{1}{e^k} = \frac{1}{k}(1 + o(1)) \ ,$$

che si comporta come alla serie armonica. Quindi per confronto asintotico la serie non converge in $x = 4 + 1/e$.

Per $x = 4 - 1/e$ invece si ha:

$$a_k \cdot (4 - 1/e - 4)^k = (-1)^k \frac{1}{e^k} \left(e^{k+\frac{1}{k}} - e^k\right) = (-1)^k (e^{1/k} - 1)$$

si tratta di una serie a termini di segno alterno. Posto $f(k) := (e^{1/k} - 1)$ si vede che $f(k) \to 0$ per $k \to +\infty$. Inoltre

$$f'(k) = -\frac{e^{1/k}}{k^2}$$

ossia $f(k)$ è decrescente,quindi per **Leibniz la serie converge per** $x = 4 - 1/e$.

5) Si consideri l'equaione differenziale

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = \sin(t)$$

a) Trovare la soluzione generale dell'equazione e risolvere il problema di Cauchy condato iniziale $\dot{x}(0) = x(0) = 0$.

b) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = \sin(t) + 1$

Svolgimento a.) Il polinomio caratteristico associato all'equazione ha le seguenti radici

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \iff \lambda = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 + i, -2 - i$$

Quindi la soluzione dell'omogenea è

$$x_o(t) = Ae^{-2t}\sin(t) + Be^{-2t}\cos(t)$$

Per calcolare una soluzione particolare procediamo per similitudine osservando che i non è radice del polinomio caratteristico; cerchiamo quindi una soluzione particolare del tipo

$$y(t) = K_1 \sin(t) + K_2 \cos(t).$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned}
\sin(t) &= \ddot{y} + 4\dot{y} + 5y \\
&= -K_1 \sin(t) - K_2 \cos(t) + 4K_1 \cos(t) - 4K_2 \sin(t) + 5K_1 \sin(t) + 5K_2 \cos(t) \\
&= \sin(t)(-K_1 - 4K_2 + 5K_1) + \cos(t)(-K_2 + 4K_1 + 5K_2) \\
&= \sin(t)(-4K_2 + 4K_1) + \cos(t)(4K_1 + 4K_2)
\end{aligned}$$

da cui

$$4K_1 - 4K_2 = 1 \ , \ 4K_1 + 4K_2 = 0 \iff K_2 = -K_1 \ , \ K_1 = 1/8 \ , \ K_2 = -1/8$$

Quindi la soluzione particolare è $y(t) = 1/8(\sin(t) - \cos(t))$ e la soluzione generale è

$$x_{Gen}(t) = x_o(t) + y(t) = Ae^{-2t}\sin(t) + Be^{-2t}\cos(t) + 1/8(\sin(t) - \cos(t))$$

Infine la soluzione del problema di Cauchy si ottiene imponento

$$x_{Gen}(0) = 0 = B - 1/8 \ \Rightarrow \ B = 1/8$$

mentre

$$\dot{x}_{Gen}(t) = -2Ae^{-2t}\sin(t) + Ae^{-2t}\cos(t) - 2Be^{-2t}\cos(t) - Be^{-2t}\sin(t) + 1/8(\cos(t) + \sin(t))$$

quindi

$$\dot{x}_{Gen}(0) = A - 2B + 1/8 = A - 1/8 = 0 \iff A = 1/8$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x_{Cauchy}(t) = 1/8(e^{-2t}\sin(t) + e^{-2t}\cos(t) + \sin(t) - \cos(t))$$

b) Per calcolare la soluzione generale nel caso in cui il temine noto sia $\sin(t) + 1$ sfruttiamo la linearità dell'equazione: la soluzione particolare con termine noto $\sin(t) + 1$ si ottiene dalla somma della soluzione particolare con termine noto $\sin(t)$ (che già conosciamo) più la soluzione particolare con termine noto $f(t) = 1$. Quest'ultima la cerchiamo della forma $\tilde{y}(t) = K$ in quanto 0 non è radice del polinomio caratteristico: Sostituento $\tilde{y}$ nell'equazione si ottiene $K = 1/5$. Quindi la soluzione generale con termine noto $\sin(t) + 1$ è la funzione

$$\tilde{x}_{Gen}(t) = Ae^{-2t}\sin(t) + Be^{-2t}\cos(t) + 1/8(\sin(t) - \cos(t)) + 1/5$$

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 5 Settembre 2018

1) *Sia*

$$f(x,y) = \begin{cases} y\, e^{-\frac{y^2}{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nel dominio di definizione;*
2. *Calcolare, se esistono, le derivate direzionali in* $(0,0)$*;*
3. *Scrivere, se esiste, l'equazione del piano tangente in* $(0,1)$.

Svolgimento. 1) Per $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione é di classe C^∞ in quanto composizione, rapporto e prodotto di funzioni C^∞. Si noti in particolare che per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2y^3 x}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{y^2}{x^2+y^2}} \quad , \quad \partial_y f(x,y) = e^{-\frac{y^2}{x^2+y^2}} \left(1 - \frac{2y^2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Quindi l'unico punto in cui studiare la funzione è l'origine.

Continuità - Conviene riscrivere la funzione in coordinate polari in quanto al denominatore è presente una potenza della distanza dall'origine:

$$f(x,y) = y\, e^{-\frac{y^2}{x^2+y^2}} \overset{coo.pol.}{=} \rho \sin\theta\, e^{-\sin^2\theta}$$

da cui si deduce che la **funzione è continua in** $(0,0)$. Infatti per $(x,y) \to (0,0)$ si ha

$$|f(x,y)| = |\rho \sin\theta\, e^{-\sin^2\theta}| \le \rho \overset{\rho\to 0}{\to} 0$$

uniformemente in θ.

Derivabilità - Studiamo l'esistenza delle derivate parziali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0 \quad , \quad \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{ye^{-1}}{y} = \frac{1}{e}$$

Quindi f **è derivabile in** $(0,0)$ **e** $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/e \end{pmatrix}$.

Differenziabilità -

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \left\langle \nabla f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{y\, e^{-\frac{y^2}{x^2+y^2}} - ye^{-1}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{y}{e} \frac{e^{-\frac{y^2}{x^2+y^2}+1} - 1}{(x^2+y^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{y}{e} \frac{e^{\frac{x^2}{x^2+y^2}} - 1}{(x^2+y^2)^{1/2}} \overset{coo.pol.}{=} \frac{1}{e} \sin\theta (e^{\cos^2\theta} - 1) \not\to 0 \ .$$

Quindi la funzione **non è differenziabile in** $(0,0)$.

2) Non essendo differenziabile in $(0,0)$ andiamo a vedere l'esistenza delle derivate direzionali direttamente dall definizione: si $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ un versore generico si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tv_2\, e^{-\frac{t^2 v_2^2}{t^2(v_1^2+v_2^2)}}}{t} = v_2\, e^{-v_2^2} \;\Rightarrow\; D_{\vec{v}} f(0,0) = v_2\, e^{-v_2^2} \ .$$

ossia f ammette in $(0,0)$ derivate direzionali pur non essendo differenziabile. Si osservi che in questo caso $\langle \nabla f(0,0), \vec{v} \rangle \neq D_{\vec{v}} f(0,0)$.

3) Essendo differenziaile in $(0,1)$ esiste in piano tangente e si ha

$$z = f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1) = e^{-1} + e^{-1}(y-1) \ .$$

$\square$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = y^2\, e^x - xy$$

a) Studiare l'esistenza e la natura degli estremi liberi della funzione.

b) Studiare gli estremi della funzione nel vincolo $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le x \ ,\ 0 \le x \le 1\}$.

Svolgimento. a) La funzione è di classe C^∞. Troviamo i punti critici imponendo l'annullamento del gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y(ye^x - 1) \\ 2ye^x - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La prima equazione ha soluzioni $y = 0$ e $y = e^{-x}$. Sostituendo $y = 0$ nella seconda otteniamo $x = 0$. Mentre sostituendo $y = e^{-x}$ nella seconda otteniamo $x = 2$. Quindi abbiamo due punti critici:

$$(0,0) \quad , \quad (2, e^{-2}) \ .$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 e^x & 2ye^x - 1 \\ 2ye^x - 1 & 2e^x \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(H_f(0,0) = -1$$

da cui segue che $(0,0)$ **è un punto di sella**. Mentre

$$H_f(2,e^{-2}) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 1 \\ 1 & 2e^2 \end{pmatrix} \ , \ \det(H_f(2,e^{-2})) = 1 \ , \ \partial_{xx} f(2,e^{-2}) = e^{-2} > 0 \ ,$$

quindi $H_f(2,e^{-2})$ è definita positiva e $(2,e^{-2})$ **è un minimo relativo**.

b) Il vincolo è un insieme chiuso e limitato. Per il teorema Weierstrass la funzione a max e min assoluto in K. Nella parte interna di K abbiamo già studiato la funzione e visto che non ci sono estremi liberi. Studiamo la funzione sulla frontiera. La frontiera ∂K di K è formata dall'unione di due curve $\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ dove

$$\gamma_1 = \{y = 0 \ ,\ 0 \le x \le 1\} \quad , \quad \gamma_2 = \{x = 1 \ ,\ 0 \le y \le 1\} \quad , \quad \gamma_3 = \{y = x \ ,\ 0 \le x \le 1\} \ .$$

Ora la restrizione della funzione sulla prima curva è costante

$$f \restriction \gamma_1 = f(x,0) = 0 \ ,\ x \in [0,1] \ .$$

Mentre

$$f \restriction \gamma_2 = f(1,y) = y^2 e - y \ ,\ y \in [0,1]$$

e si osservi che $f'(1,y) = 2ye - 1 > 0 \iff y > 1/2e$. Quindi $y = 1/(2e)$ è un minimo relativo di $f(1,y)$ per $y \in [0,1]$. Infine

$$f \restriction \gamma_3 = f(x,x) = x^2 e^x - x^2 = x^2(e^x - 1) \ ,\ x \in [0,1]$$

da cui

$$f'(x,x) = 2x(e^x - 1) + x^2 = x(2e^x - 1 + x^2) \ge 0 \ ,\ \forall x \in [0,1]$$

ossia la funzione è strettamente crescente nell'intervallo e assume il valore minimo in $x = 0$ ed il massimo in $x = 1$. Confrontanto i risultati ottenuti si ha

$$f(x,0) = 0 \ ,\ x \in [0,1] \quad ; \quad f(1,1/(2e)) = -\frac{1}{4e} \quad ; \quad f(1,1) = e - 1$$

da cui segue che $(1,1/(2e))$ è il **minimo assoluto** della funzione ristretta a K e che $(1,1)$ è il **minimo assoluto** della funzione ristretta a K. $\square$

3) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{2xz^2y}{x^2z^2+1}\,dx \;+\; \ln(x^2z^2+1)\,dy \;+\; \frac{2x^2zy}{x^2z^2+1}\,dz$$

a) Dire se la forma è chiusa ed in caso affermativo calcolarne una primitiva.

b) Calcolare gli integrali $\int_{\gamma_1}\omega$ e $\int_{\gamma_2}\omega$ dove γ_1 è il segmento che va dal punto $(0,1,0)$ al punto $(1,1,1)$ mentre γ_2 è la curva $\gamma_2(t) := e^{t(1-t)}\cdot(1-t,\,1,\,1-t)$ per $t\in[0,1]$.

Svolgimento. Il dominio di ω è tutto $\mathbb{R}^3$. La forma differenziale è chiusa

$$\partial_x a_2 = \partial_x \ln(x^2z^2+1) = \frac{2xz^2}{x^2z^2+1} = \partial_y \frac{2xz^2y}{x^2z^2+1} = \partial_y a_1\ ;$$

$$\partial_x a_3 = \partial_x \frac{2x^2zy}{x^2z^2+1} = \frac{4xzy}{(x^2z^2+1)^2} = \partial_z \frac{2xz^2y}{x^2z^2+1} = \partial_z a_1\ ;$$

$$\partial_y a_3 = \partial_y \frac{2x^2zy}{x^2z^2+1} = \frac{2x^2z}{x^2z^2+1} = \partial_z \ln(x^2z^2+1) = \partial_z a_2\ ;$$

quindi, essendo il dominio semplicemente connesso, è anche esatta. Calcoliamo una primitiva f:

$$\partial_x f(x,y,z) = a_1(x,y,z) = \frac{2xz^2y}{x^2z^2+1} \ \Rightarrow\ f(x,y,z) = y\int \frac{2xz^2}{x^2z^2+1}dx + h(y,z) = y\ln(x^2z^2+1)+h(y,z)\ .$$

Imponiamo la seconda equazione su f

$$\ln(x^2z^2+1)+\partial_y h(y,z) = \partial_y f(x,y,z) = a_2(x,y,z) = \ln(x^2z^2+1) \ \Rightarrow\ \partial_y h(y,z)=0 \ \Rightarrow\ h(y,z)=g(z)\ .$$

Imponiamo infine la terza equazione:

$$\frac{2yzx^2}{x^2z^2+1} + \partial_z g(z) = \partial_z f(x,y,z) = a_3(x,y,z) = \frac{2x^2zy}{x^2z^2+1} \ \Rightarrow\ g(z) = cost$$

Quindi una primitiva di ω è la funzione

$$\boxed{f(x,y,z) = y\ln(x^2z^2+1)}$$

Infine conoscendo la primitiva si ha

$$\int_{\gamma_1}\omega = f(1,1,1) - f(0,1,0) = \ln(2)$$

mentre

$$\int_{\gamma_2}\omega = f(0,1,0) - f(1,1,1) = -\ln(2)$$

□

4) Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_D \frac{x^2 \arctan(y)}{y^5}\, dxdy$$

dove $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \sqrt{|x|}\ ,\ |x| \le 1\}$

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio in quanto il denominatore della funzione integranda si annulla per $y = 0$. Vista la funzione integranda conviene descrivere l'insieme come un insieme semplice rispetto alla variabile x. Si noti che

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\ ,\ y^2 \le |x| \le 1\}\ .$$

La funzione integranda é positiva nell'insieme di integrazione. Quindi per studiare Quindi per studiare l'integrale in senso improprio consideriamo

$$\int_{D_\varepsilon} \frac{x^2 \arctan(y)}{y^5}\, dxdy \quad , \quad D_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \le y \le 1\ ,\ y^2 \le |x| \le 1\}$$

con $\varepsilon > 0$. L'insieme D_ε è simmetrico rispetto all scambio $x \to -x$ mentre la funzione integranda è pari, quindi

$$\int_{D_\varepsilon} \frac{x^2 \arctan(y)}{y^5}\, dxdy = 2\int_{D'_\varepsilon} \frac{x^2 \arctan(y)}{y^5}\, dxdy\ ,\ \ D'_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \le y \le 1\ ,\ y^2 \le x \le 1\}\ .$$

Ossia

$$\begin{aligned}\int_{D_\varepsilon} \frac{x^2 \arctan(y)}{y^5}\, dxdy &= 2\int_\varepsilon^1 dy \frac{\arctan(y)}{y^5} \int_{y^2}^1 dx\, x^2 \\ &= \frac{2}{3}\int_\varepsilon^1 dy \frac{\arctan(y)}{y^5}(1-y^6) = \frac{2}{3}\int_\varepsilon^1 dy \frac{\arctan(y)}{y^5} - \frac{2}{3}\int_\varepsilon^1 dy\, y \arctan(y)\ .\end{aligned}$$

A questo punto si vede che il valore dell'integrale è $+\infty$. Infatti la funzione $\frac{\arctan(y)}{y^5}$ non è integrabile in 0 in quanto $\frac{\arctan(y)}{y^5} = y^{-4}(1+o(1)$ per $y \to 0^+$. Mentre la funzione $y\arctan(y)$ è chiaramente integrabile in 0 e da un contributo finito all'integrale. In particolare

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 dy\, y \arctan(y) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{y^2\arctan(y)}{2}\Big|_\varepsilon^1 - \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \frac{y^2}{1+y^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{y^2\arctan(y)}{2} - \frac{y}{2} + \arctan(y)\right)_\varepsilon^1 = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

□

5) Trovare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t) \quad , \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; , \; \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; .$$

Svolgimento. Calcoliamo prima la soluzione generale dell'omogenea. Si osservi che la matrice A è diagonalizzabile con autovalori e autovettori determinati dalle equazioni:

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = -1 \;,$$

$$(A-1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1 \;,\; b = 0 \;,$$

$$(A+1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1 \;,\; b = 1 \;,$$

Quindi all'autovalore $\lambda_1 = 1$ corrisponde l'autovettore $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mentre a $\lambda_2 = -1$ corrisponde l'autovettore $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La generica soluzione dell'omogenea è

$$\vec{x}_{om}(t) = Ae^t\vec{v_1} + Be^{-t}\vec{v_2}$$

Per calcolare la soluzione particolare calcoliamo le soluzioni ausiliarie dell'omogeneaa definite dalle condizioni

$$\vec{x}_{om}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_{om}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da cui si vede che la prima soluzione è soddisfatta per $B = 0$ ed $A = 1$. Mentre la seconda è soddisfatta per $A = 1/2$ e $B = -1/2$. Quindi

$$\vec{x}^1_{aus}(t) = e^t\vec{v_2} \quad , \quad \vec{x}^2_{aus}(t) = \frac{1}{2}(-e^t\vec{v_1} + e^{-t}\vec{v_2}) \; .$$

Una soluzione particolare dell'equazione generale è data dalla relazione

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \int_0^t (\vec{x}^1_{aus}(t-s)f_1(s) + \vec{x}^2_{aus}(t-s)f_2(s))ds = \int_0^t \vec{x}^1_{aus}(t-s)ds \\ &= \int_0^t e^{t-s}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = (-1+e^t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui segue che la soluzione generale è

$$\boxed{\vec{x}_{gen}(t) = \vec{x}_{om}(t) + \vec{y}(t) = e^t(A+1)\vec{v_1} + Be^{-t}\vec{v_2} - \vec{v_1} \; .}$$

□

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 7 Lulgio 2018

1) *Data la funzione*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^4y^2 - 7$$

a) Studiare l'esistenza e la natura degli estremi liberi della funzione.

b) Trovare il massimo ed il mnimo assoluto della funzione nella regione

$$K := \{0 \le x \le y \ , \ 0 \le y \le 1\}$$

Svolgimento. a) La funzione è di classe C^∞. Troviamo i punti critici imponendo l'annullamento del gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x^3y^2 \\ 4y^3 - 2x^4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3(1 - y^2) \\ 2y(2y^2 - x^4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La prima equazione ha soluzioni $x = 0$ e $y = \pm 1$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda otteniamo $y = 0$. Mentre sostituendo $y = \pm 1$ nella seconda otteniamo $x = \pm \sqrt[4]{2}$. Quindi abbiamo cinque punti critici:

$$(0, 0) \quad , \quad (\pm \sqrt[4]{2}, 1) \quad , \quad (\pm \sqrt[4]{2}, -1) \ .$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2(1 - y^2) & -8x^3y \\ -8x^3y & 12y^2 - 2x^4 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(\pm \sqrt[4]{2}, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 8(2)^{3/4} \\ \pm 8(2)^{3/4} & 12 - 4 \end{pmatrix} \quad \det(H_f(\pm \sqrt[4]{2}, \pm 1) = -64(2)^{3/2}$$

da cui segue che is quattro punti $(\pm \sqrt[4]{2}, 1)$, $(\pm \sqrt[4]{2}, -1)$ **sono punti di sella**. Mentre

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Per vedere se si tratta di una punto di minimo o di sella si osservi che

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^4 - x^4y^2 = x^4(1 - y^2) + y^4 \ge 0 \iff x^4(1 - y^2) \ge -y^4$$

e questo è verificato se $|y| < 1$. Ossia $f(x, y) - f(0, 0) \ge 0$ nella striscia $|y| < 1$ che contiene l'origine. Quindi $(0, 0)$ **è un minimo relativo**.

b) Il vincolo è un insieme chiuso e limitato. Per il teorema Weierstrass la funzione a max e min assoluto in K. Nella parte interna di K abbiamo già studiato la funzione e visto che non ci sono estremi liberi ($(0, 0)$ cade sulla frontiera di K). Studiamo la funzione sulla frontiera. La frontiera ∂K di K è formata dall'unione di due curve $\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ dove

$$\gamma_1 = \{y = 1 \ , \ 0 \le x \le 1\} \quad , \quad \gamma_2 = \{x = 0 \ , \ 0 \le y \le 1\} \quad , \quad \gamma_3 = \{y = x \ , \ 0 \le x \le 1\} \ .$$

Ora la restrizione della funzione sulla prima curva è costante

$$f \restriction \gamma_1 = f(x, 1) = -6 \ , \ x \in [-1, 1] \ .$$

Mentre

$$f \restriction \gamma_2 = f(0,y) = y^4 - 7 \ , \ y \in [0,1]$$

che per $y \in [0,1]$ è strettamente crescente. Quindi ha un minimo in $y = 0$ e un max per $y = 1$ corrispondenti ai punti $(0,0)$ e $(0,1)$. Infine

$$f \restriction \gamma_3 = f(x,x) = 2x^4 - x^6 - 7 \ , \ x \in [0,1]$$

si osservi che

$$f'(x,x) = 8x^3 - 6x^5 = 2x^3(4 - 3x^2) > 0 \quad , \quad \forall x \in [0.1]$$

Quindi $x = 0$ e $x = 1$ sono il minimo ed il max assoluto della funzione lungo γ_3 corrispondenti ai punti $(0,0)$ e $(1,1)$. In conclusione si vede che il punto $(0,0)$ é il **minimo assoluto** della funzione nel vincolo K e in particolare $f(0,0) = -7$. Mentre i punti $(x,1)$, per $x \in [0,1]$ sono **massimi assoluti** della funzione sul vincolo e $f(x,1) = -6$. $\square$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^2 e^x}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq 0 \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Studiare al variare di $\alpha \geq 0$ la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

b) Calcolare per $\alpha = 0$ le derivate direzionali nel punto $(x,y) = (1,0)$.

Svolgimento. *a*) Per $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione é di classe C^∞ indipendentemente dal parametro α in quanto composizione e rapporto di funzioni C^∞. Quindi l'unico punto in cui studiare la funzione è l'origine.

Continuità - Conviene riscrivere la funzione in coordinate polari in quanto al denominatore è presente una potenza della distanza dall'origine:

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^2 e^x}{(x^2+y^2)^\alpha} \overset{coo.pol.}{=} \frac{\rho^2(\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta})}{\rho^{2\alpha}} = \rho^{2(1-\alpha)}(\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta})$$

da cui si deduce che la **funzione è continua in** $(0,0)$ **per** $\alpha < 1$. Infatti per tali valori di α per $(x,y) \to (0,0)$ si ha

$$|f(x,y)| = |\rho^{2(1-\alpha)}(\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta})| \leq \rho^{2(1-\alpha)}(\rho^2 + e^\rho) \overset{\rho\to 0}{\to} 0$$

uniformemente in θ. Per $\alpha \geq 1$ il limite non esiste e quindi la funzione non è continua. Ad esempio per $\alpha = 1$ si osservi che

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = 0 \quad , \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2} = 1$$

quindi il limite non esiste.

Derivabilità - Studiamo l'esistenza delle derivate parziali:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^{2\alpha}x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^{4-2\alpha}}{x} = \begin{cases} 0 & \alpha < 3/2 \\ \nexists & \alpha \geq 3/2 \end{cases}$$

Quindi la derivata parziale in $(0,0)$ rispetto alla x esiste ed è uguale a 0 se $\alpha < 3/2$. Mentre

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^{2\alpha}y} = \lim_{y\to 0}\frac{|y|^{2-2\alpha}}{y} = \begin{cases} 0 & \alpha < 1/2 \\ \nexists & \alpha \geq 1/2 \end{cases}$$

Quindi la derivata parziale in $(0,0)$ rispetto alla y esiste ed è uguale a 0 se $\alpha < 1/2$. In conclusione f **è derivabile in** $(0,0)$ **per** $\alpha < 1/2$ **e** $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Derivabilità - Studiamo la differenziabilità per $\alpha < 1/2$:

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \left\langle \nabla f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x^4 + y^2 e^x}{(x^2+y^2)^{\alpha+1/2}} \overset{coo.pol.}{=} \frac{\rho^2(\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta})}{\rho^{2\alpha+1}}$$
$$= \rho^{1-2\alpha}(\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta})$$

che tende a 0 uniformemente in θ se e solo se $\alpha < 1/2$. Quindi in conclusione f **è differenziabile in** $(0,0)$ **se e solo se** $\alpha < 0$.

b) Abbiamo osservato che per $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è differenziabile quindi $D_{\vec{v}} f(1,0) = \langle \nabla f(1,0), \vec{v} \rangle$. Ora per $\alpha = 0$ si ha

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + y^2 e^x \\ 2ye^x \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$D_{\vec{v}} f(1,0) = 4v_1$$

$\square$

3) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{1+xy^2}{x}\,dx + \frac{2xy^2-1}{y}\,dy$$

a) *Studiare la chiusura e l'esattezza di ω. Nel caso in cui la forma risulti esatta calcolarne una primitiva.*

b) *Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ la spezzata $(1,-1) \to (2,-1) \to (2,-2)$.*

Svolgimento. Il dominio di ω

$$D_\omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ |x \neq 0 \ o \ y \neq 0\}$$

è formato da quttro componenti connesse, la parte interna dei quattro quadranti, ognuna delle quali è semplicemente connessa. Quindi il dominio, seppur non connesso, è un indieme semplicemente connesso. La forma differenziale è chiusa

$$\partial_x a_2 = \partial_x \frac{2xy^2-1}{y} = 2y = \partial_y \frac{1+xy^2}{x} = \partial_y a_1 \ ,$$

quindi, essendo il dominio semplicemente connesso, è anche esatta. Calcoliamo una primitiva f:

$$\partial_x f(x,y) = a_1(x,y) = \frac{1+xy^2}{x} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int \frac{1+xy^2}{x} dx \ + \ h(y) = \ln|x| + xy^2 + h(y)$$

Per determinare h imponiamo la seconda equazione su f

$$2xy + \partial_y h(y) = \partial_y f(x,y) = a_2(x,y) = \frac{2xy^2-1}{y} = 2xy - \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \partial_y h(y) = -\frac{1}{y}$$

ossia

$$h(y) = -\int \frac{1}{y} + cost = -\ln|y| + cost$$

Scegliendo, per semplicità, $cost = 0$ otteniamo la primitiva

$$\boxed{f(x,y) = \ln\frac{|x|}{|y|} + xy^2}$$

b) Si ossevi che il sostegno della curva γ si trova nella quarto quadrante $(x > 0, y < 0)$. L'integrale è dato da

$$\int_\gamma \omega = f(2,-2) - f(1,-1) = 8 - 1 = 7$$

$\square$

4) Calcolare l'integrale

$$\int_D \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \ ,\ 0 \leq y \leq x \ ,\ 0 \leq x \leq 1\}$

Svolgimento. Per descrivere l'insieme e la funzione integranda conviene passare in coordinate polari. Per quanto riguarda l'insieme D ponendo $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$ si ha

$$1 \leq \rho^2 \quad , \quad 0 \leq \cos\theta \leq \sin\theta \quad , \quad \rho\cos\theta \leq 1 \ .$$

La seconda condizione implica che $\theta \in [0, \pi/4]$ mentre la terza e la prima condizione implicano $1 \leq \rho \leq 1/\cos\theta$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{1/\cos\theta} d\rho\rho\left(\cos^2\theta+1\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d\theta\left(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\right)_1^{1/\cos\theta}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d\theta(1-\cos^2\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}-1)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d\theta(-\cos^2\theta+\frac{1}{\cos^2\theta})\\
&= \frac{1}{2}\tan\theta\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d\theta\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\sin(2\theta)}{4}\Big|_0^{\pi/4}\right)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \frac{6-\pi}{16}
\end{aligned}$$

$\square$

5) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\dddot{x} + 3\ddot{x} - 4\dot{x} = t \ ,$$

e risolvere il problema di Cauchy con dati iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -3/16$, $\ddot{x}(0) = -1/8$.

Svolgimento. Si tratta di un'equazione differenziale lineare e del terzo ordine. Risolviamo l'omogenea: le radici del polinomio caratteristico sono

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = 0 \quad , \quad \lambda = 0, 1, -4 \ .$$

quindi

$$\boxed{x_{om}(t) = A + Be^t + Ce^{-4t}}$$

Consideriamo il termine noto $f(t) = t$. Osservando che 0 è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea cerchiamo una soluzione della forma $y(t) = t(K + Ht)$. Sostituendo nell'equazione si ha :

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} - 4\dot{y} = t \iff 6H - 4(K + 2Ht) = 6H - 4K - 8Ht = t$$

Quindi $H = -1/8$ e $K = -3/16$. Quindi lasoluzione particolare sarà $y(t) = -\frac{t}{16}(3 + 2t)$ e la soluzione generale

$$\boxed{x_{Gen}(t) = A + Be^t + Ce^{-4t} - \frac{t}{16}(3 + 2t)}$$

Imponiamo il problema di Cauchy

$x_{Gen}(0) = 0 = A + B + C$, $\dot{x}_{Gen}(0) = -3/16 = B - 4C - 3/16$, $\ddot{x}_{Gen}(0) = -1/8 = B + 16C - 1/4$

da cui $C = 1/160$, $B = 1/40$, $A = -5/160$ e

$$\boxed{x_{Cauchy}(t) = \frac{1}{160}(-5 + 4e^t + 1e^{-4t}) - \frac{t}{16}(3 + 2t)}$$

□

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 15 Febbraio 2018

1) *Sia data la funzione*

$$f(x,y) = x^4 - xy^2 + y^2 - 9$$

a) Determinare classificare gli estremi liberi della funzione.

b) Calcolare, motivandone l'esistenza, massimi e minimi assoluti della funzione nella regione $Z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y\ ,\ y \leq 1\}$.

Svolgimento. *a*) La funzione f, essendo un polinomio, è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Calcoliamo gli estremi liberi imponendo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - y^2 \\ -2xy + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 - y^2 \\ 2y(-x+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dalla seconda equazione si ha $y = 0$ e $x = 1$. Sostituendo $y = 0$ nella prima otteniamo $x = 0$. Mentre sostituendo $x = 1$ nella prima otteniamo $y = \pm 2$. Quindi abbiamo tre punti critici:

$$(0,0)\quad ,\quad (1,\pm 2)\ .$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -2y \\ -2y & -2x+2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(1,\pm 2) = \begin{pmatrix} 12 & \mp 4 \\ \mp 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(H_f(1,\pm 2) = -16$$

da cui segue che $(1,\pm 2)$ **sono punti di sella**. Mentre

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è semi-definita positiva. Per vedere se si tratta di una punto di minimo o di sella si osservi che

$$f(x,y) - f(0,0) = x^4 - xy^2 + y^2 = x^4 + y^2(1-x) \geq 0 \iff y^2(1-x) \geq -x^4$$

e questo è banalmente vero se $1 - x > 0 \iff x < 1$. Ossia $f(x,y) - f(0,0) \geq 0$ nel semipiano $x < 1$ che contiene l'origine. Quindi $(0,0)$ **è un minimo relativo**.

b) Il vincolo è un insieme chiuso e limitato. Per il teorema Weierstrass la funzione a max e min assoluto in Z. Nella parte interna di Z abbiamo già studiato la funzione e visto che non ci sono estremi liberi ($(0,0)$ cade sulla frontiera di Z). Studiamo la funzione sulla frontiera. La frontiera ∂Z di Z è formata dall'unione di due curve $\partial Z = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove

$$\gamma_1 = \{y = x^2\ ,\ -1 \leq x \leq 1\}\quad ,\quad \gamma_2 = \{y = 1\ ,\ -1 \leq x \leq 1\}$$

e dai punti non regolari $(-1,1)$ e $(1,1)$ in cui si intersecano le due curve. Ora

$$f \restriction \gamma_1 = f(x,x^2) = x^4 - x^5 + x^4 - 9 = 2x^4 - x^5 + 9\ ,\ x \in [-1,1]$$

la cui derivata

$$f'(x,x^2) = -5x^4 + 8x^3 = x^3(-5x+8) > 0 \iff x \in (0, 8/5)$$

Osservando che $8/5 > 1$, si ha che $f(x, x^2)$ ha un minimo relativo in $x = 0$ corrispondente al punto $(0, 0)$. Mentre

$$f \upharpoonright \gamma_2 = f(x, 1) = x^4 - x - 8\ ,\ x \in [-1, 1]$$

si osservi che

$$f'(x, 1) = 4x^3 - 1 > 0 \iff x > 1/4^{1/3}$$

Quindi il punto $(x, y) = (1/4^{1/3}, 1)$ è un minimo relativo della funzione ristretta a γ_2. Infine confrontando i punti trovati sulla parte regolare della frontiera con i valori che assume la funzione sui punti in cui il vincolo è non regolare $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ si ha

$$f(-1, 1) = -6 \quad , \quad f(1, 1) = -8 \quad , \quad f(0, 0) = -9 \quad , \quad f(1/4^{1/3}, 1) = -\frac{3}{4^{4/3}} - 8$$

ossia $(0, 0)$ **è il minimo assoluto e** $(-1, 1)$ **è il massimo assoluto**.

□

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{2y}{y^2+x^2}\,dx + \left(\frac{-2x}{y^2+x^2} + x\right)\,dy$$

calcolare l'integrale di ω lungo l'ellisse γ di equazione $(x+1)^2 + 2y^2 = 4$ percorsa una volta in senso antiorario.

Svolgimento. La forma differenziale è definita nell'insieme $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La forma si decompone

$$\omega = -2\omega_{ang} + \omega'$$

dove ω_{ang} è la funzione angolo $\omega_{ang} = \frac{-y}{y^2+x^2}\,dx + \frac{x}{y^2+x^2}\,dy$ e $\omega' = xdy$. Dato che l'ellisse γ contiene l'origine ed è percosa in senso antiorario si ha

$$\int_\gamma \omega_{ang} = 2\pi$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, si osservi che ω' non è chiusa quindi va integrata direttamente sulla curva. Parametrizzando l'ellisse in coordinate ellittiche $x+1 = \rho\cos\theta$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta$ si ha: $\rho = 2$ e

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} 1+2\cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} -2\sin\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega' = \int_\gamma xdy = \int_0^{2\pi} d\theta(1+2\cos\theta)\sqrt{2}\cos\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta\cos^2\theta = 2\sqrt{2}\pi$$

In conclusione

$$\int_\gamma \omega = -2\int_\gamma \omega_{ang} + \int_\gamma \omega' = -4\pi + 2\sqrt{2}\pi = 2\pi(\sqrt{2}-2)$$

$\square$

3) Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_A \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy$$

dove $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq x+2\ ,\ 4-x \leq y\}$

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio in quando il dominio di integrazione non è limitato. La funzione nel dominio di integrazione è ben definita e continua. Per calcolare l'integrale si consideri la succesione

$$A_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq x+2\ ,\ 4-x \leq y \leq n-x\}$$

con $n \geq 4$ e si osservi che

$$\bigcup_{n=4}^{\infty} A_n = A\ ,\ A_n \subset A_{n+1}\ , \forall n \geq 4$$

e che ogni A_n è misurabile (la frontiera è una curva regolare a tratti) e di misura finita. Inoltre la funzione all'interno del dominio di integrazione è maggiore o uguale a 0. Ora per calcolare l'integrale

$$\int_{A_n} \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy$$

eseguiamo il cambio di variabili

$$u := y-x\ ,\ w := y+x\ ,\ 0 \leq u \leq 2\ ,\ 4 \leq w \leq n\ .$$

da cui invertendo si ottiene

$$y = \frac{u+w}{2}\ ,\ x = \frac{w-u}{2}\ ,\ J(u,w) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J(u,w) = -1/2\ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{A_n} \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy &= \int_0^2 du \int_4^n dw\, \frac{1}{2}\,\frac{e^u}{(w+1)(w-1)}\,dudv \\
&= \frac{e^2-1}{2}\int_4^n dw \frac{1}{(w+1)(w-1)}\,dudv = \frac{e^2-1}{4}\int_4^n dw \left(\frac{-1}{w+1} + \frac{1}{w-1}\right) dudv \\
&= \frac{e^2-1}{4}\ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right|_4^n = \frac{e^2-1}{4}\left(\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{3}{5}\right)\right)
\end{aligned}$$

quindi

$$\int_A \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy = \lim_{n\to+\infty}\int_{A_n} \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy = \frac{e^2-1}{4}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$\square$

4) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^2y^2, x^2, 0)$ *attraverso la superficie* S *definita dalle equazioni* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\ ,\ 0 \le z \le 2y+3\}$ *orientata in modo tale che nel punto* $(0,1,0)$ *il vettore normale abbia seconda componente positiva.*

Svolgimento. La superficie è invariante per lo scambio $x \to -x$ mentre la divergenza del campo $\mathrm{div}(\vec{F}) = 2xy^2$ è una funzione dispari nella variabile x. Quindi conviene applicare il teorema della divergenza per calcolare il flusso attraverso S. Chiudiamo la superficie S con i dischi

$$D_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2y+3\ ,\ x^2+y^2 \le 1\}$$

e

$$D_0 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^2+y^2 \le 1\ ,\ z = 0\}$$

In forma parametrica si ha

$$D_1(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 2s+3 \end{pmatrix} \quad , \quad t^2+s^2 \le 1 \quad ; \quad D_2(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t^2+s^2 \le 1$$

i vettori tangenti sono $\partial_t D_1 = (1,0,0)$ e $\partial_s D_1 = (0,1,2)$ e $\partial_t D_2 = (1,0,0)$ e $\partial_s D_2 = (0,1,0)$. Mentre

$$\partial_t D_1 \wedge \partial_s D_1 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \partial_t D_2 \wedge \partial_s D_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per applicare il teorema della divergenza orientiamo la superficie chiusa $\tilde{S} = S \cup D_1 \cup D_2$ con versore normale uscente. Quindi l'orientamento su D_1 è esattamente quello ottenuto dal prodotto vettoriale mentre quello su D_0 è opposto a quello ottenuto dal prodotto vettoriale

$$\vec{N}^+_{D_1}(t,s) = \partial_t D_1 \wedge \partial_s D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{N}^+_{D_2}(t,s) = \partial_t D_2 \wedge \partial_s D_2 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi per il teorema della divergenza

$$0 = \int_{int\tilde{S}} \mathrm{div}\vec{F} = \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_S \right\rangle + \int_{D_1} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_1} \right\rangle + \int_{D_2} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_2} \right\rangle$$

quindi

$$\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_S \right\rangle = -\int_{D_1} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_1} \right\rangle - \int_{D_2} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_2} \right\rangle \ .$$

dove $int\tilde{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 2y+3\ ,\ x^2+y^2 \le 1\}$. Ora si osservi che $\int_{D_2} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_2} \right\rangle = 0$ mentre

$$\int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_D \right\rangle = \int_{t^2+s^2 \le 1} (-2)t^2\, dtds = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 d\theta d\rho \rho^3 \cos^2\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

dove si è eseguito il cambio di variabili in coordinate polari $t = \rho\cos\theta$, $s = \rho\sin\theta$. Infine l'orientamento richiesto dal problema su S è uguale a quello uscente dalla superficie $\tilde{S}$. Quindi in conclusione

$$\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_S \right\rangle = -\int_{D_1} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_1} \right\rangle - \int_{D_2} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_2} \right\rangle = \frac{\pi}{2}$$

□

5) Dato il sistema di equazioni differenziale

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare la soluzione generale del sistema e del problema di Cauchy con dato iniziale $\vec{x}(0) = (1, 0)$.

Svolgimento. Autovalori della matrice che definisce il sistema

$$0 = det(A - \lambda) = (5 - \lambda)(1 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 \iff \lambda = 3 \ .$$

Quindi $\lambda = 3$ è autovalore di A con molteplicità due. Gli autovettori sono dati dalla relazione

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - 3)\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b \\ 4a - b \end{pmatrix}$$

da cui si vede che l'autospazio è di dimensione 1 e possiamo scegliere come autovettore

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

Quindi la molteplicità geometrica è 1. Cerchiamo un autovettore generalizzato imponendo

$$(A - 3)\vec{v} = \vec{v}_1 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2a - b \\ 4a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da cui segue

$$b = 2a - 1 \ \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + av_1 \ .$$

dato che $\vec{v}_1$ è nel nucleo di $(A - 3)$ possiamo scegliere come autovettore generalizzato

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

La generica soluzione $\vec{x}_{gen}(t)$ dell'equazione si ottiene dalla matrice esponenziale imponendo

$$\vec{x}_{Gen}(t) = e^{3t} \, e^{(A-3)t}(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = e^{3t}(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + bt(A - 3)\vec{v}_2) = e^{3t}(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + bt\vec{v}_1) \ .$$

Risolviamo infine il problema di Cauchy:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - b \end{pmatrix} \iff a = 1 \ , \ b = 2$$

Quindi

$$\vec{x}_{Cauchy}(t) = e^{3t}(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 2t\vec{v}_1)$$

$\square$

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 19 Settembre 2018

1) *Si consideri la funzione*

$$f(x,y) = \arctan(\sqrt[3]{y})\ \sqrt[3]{(x-1)^2 + y^2}\ .$$

1. *Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nel dominio di definizione;*
2. *Calcolare, se esistono, le derivate direzionali in* $(1,0)$.

Svolgimento. 1) La funzione é continua in tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto composizione, rapporto e prodotto di funzioni continue. Un discorso a parte va fatto sulla derivabilità in quanto sono presenti funzioni non derivabili in tutto il loro dominio ossia la radice cubica che non è derivabile in zero. Quindi per la retta $y \neq 0$, dove si annulla $\sqrt[3]{y}$ ed anche $\sqrt[3]{(x-1)^2+y^2}$ per $x=1$, la funzione risulta C^∞. Per $y=0$ ed $x \neq 1$ la funzione non è derivabile, quindi neanche differenziabile. Infatti: $x_0 \neq 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y-0} &= \frac{\arctan(\sqrt[3]{y})\ \sqrt[3]{(x_0-1)^2+y^2}}{y} \\
&= \frac{\sqrt[3]{y}(x_0-1)^{2/3}}{y}(1+o(1)) = y^{-2/3}(x_0-1)^{2/3}(1+o(1)) \to +\infty\ .
\end{aligned}$$

La derivata $\partial_y f(x_0,0)$ non esiste per $x_0 \neq 1$ quindi la funzione non è derivabile neanche differenziabile. Per $x_0 = 1$ e $y \to 0$ invece

$$\frac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0} = \frac{\arctan(\sqrt[3]{y})\ \sqrt[3]{y^2}}{y} = \frac{y}{y}(1+o(1)) \to 1 \quad \Rightarrow \quad \partial_y f(1,0) = 1$$

e $y=0$ e $x \to 1$

$$\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1} = \frac{0}{x-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_x f(1,0) = 0$$

Quindi f è derivabile in $(1,0)$. Per la differenziabilità si osservi che per $(x,y) \to (1,0)$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{f(x,y) - f(1,0) - \left\langle \nabla f(1,0), \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle}{((x-1)^2+y^2)^{1/2}} &= \frac{\arctan(\sqrt[3]{y})\ \sqrt[3]{(x-1)^2+y^2} - y}{((x-1)^2+y^2)^{1/2}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{y}\ \sqrt[3]{(x-1)^2+y^2}(1+o(1)) - y}{((x-1)^2+y^2)^{1/2}} \\
&\overset{coo.\ pol}{=} \frac{\rho^{1/3}\sin^{1/3}\theta\rho^{2/3}(1+o(1)) - \rho\sin\theta}{\rho} \\
&= \sin^{1/3}\theta(1+o(1)) + \sin\theta \to \nexists\ ,
\end{aligned}$$

dove si sono usate coordinate polari centrate in $(1,0)$. Quindi la funzione nonè differenziabile. Infine per il calcolo della derivata direzionale, visto che f non è differenziabile in $(1,0)$ usiamo la definizione: preso un versore $\vec{v} = (v_1, v_2)$ per $t \to 0$ si ha

$$\frac{f(1+tv_1, tv_2) - f(1,0)}{t} = \frac{\arctan(\sqrt[3]{tv_2})t^{2/3}}{t} = \frac{t\sqrt[3]{v_2}}{t}(1+o(1)) \to \sqrt[3]{v_2}\ .$$

Quindi la derivata direzionale in $(1,0)$ esiste e vale $D_{\vec{v}} f(1,0) = \sqrt[3]{v_2}$. □

2) Data la funzione

$$f(x,y) = x(y-1)(x-2y^2)\ ,$$

studiarne l'esistenza e la natura degli estremi liberi.

Svolgimento. *a*) La funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Troviamo i punti critici imponendo l'annullamento del gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (y-1)(x-2y^2) + x(y-1) \\ x(x-2y^2) - 4yx(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y-1)(x-y^2) \\ x(x-6y^2+4y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

- La prima equazione ha soluzioni $y = 1$ e $x = y^2$. Sostituendo $y = 1$ nella seconda otteniamo

  $$x(x-2) = 0 \quad \stackrel{\textit{punti critici}}{\Rightarrow} \quad (0,1)\ ,\ (2,1)\ .$$

  Sostituento $y^2 = x$ nella seconda si ha

  $$y^3(-5y-4) = 0 \quad \stackrel{\textit{punti critici}}{\Rightarrow} \quad (0,0)\ ,\ (16/25, 4/5)$$

- Calcoliamo la matrice Hessiana

  $$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y-1) & -6y^2+2x+4y \\ -6y^2+2x+4y & -12xy+4x \end{pmatrix}$$

  Quindi

  $$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(H_f(0,1) = -4 \quad \Rightarrow \quad \textit{punto di sella}$$

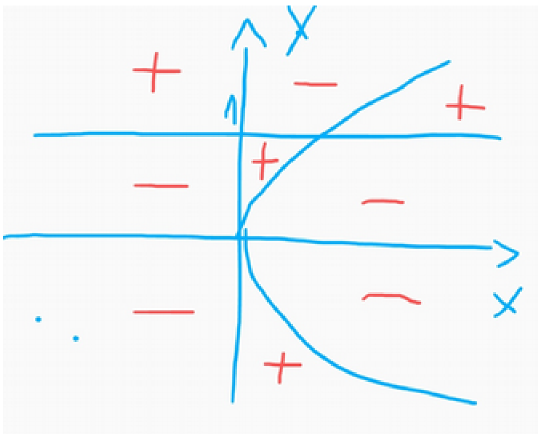
  $$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -16 \end{pmatrix} \quad \det(H_f(2,1) = -4 \quad \Rightarrow \quad \textit{punto di sella}$$

  $$H_f\left(\tfrac{16}{25}, \tfrac{4}{5}\right) = \begin{pmatrix} -2/5 & 16/25 \\ 16/25 & -768/125 \end{pmatrix} \quad \det(H_f\left(\tfrac{16}{25}, \tfrac{4}{5}\right) > 0\ ,\ f_{xx}\left(\tfrac{16}{25}, \tfrac{4}{5}\right) = -\frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \textit{max relativo}\ .$$

  L'unico punto indeterminato al momento è l'origine in quanto la matrice Hessiana

  $$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

  è semi-definita negativa. Si deduce tuttavia dalla forma della funzione come l'origine sia un *punto di sella*. Il segno di $f(x,y) - f(0,0)$ infatti dipende dal prodotto di tre fattori $x(y-1)(x-y^2)$ di cui sia la retta $x = 0$ che la curva $x = y^2$ passano per l'origine, il che implica un cambiamento di segno in ogni intorno di $(0,0)$. Il segno di $f(x,y) - f(0,0)$ è



da cui si deduce che $(0,0)$ ùn punto di sella. Alternativamente sulla curva $y=0$ si ha $f(x,0) = -x^2$ che è minore o uguale a zero, mentre sulla curva $x = y^4$ si ha $f(y^4, y) = y^6(y-1)(y^2-2)$ la quale è maggiore o uguale a zero per $|y| < 1$.

$\square$

3) Data la forma differenziale

$$\omega := \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + 2e^{x^2y}xy + 3x^2 \right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + e^{x^2y}x^2 + 1 \right) dy \ .$$

Calcolare motivando le risposte:

a) l'integrale $\int_\gamma \omega$ *dove* γ *è l'ellisse* $(x-2)^2 + 4y^2 = 1$ *percorsa in senso orario;*

b) l'integrale $\int_\beta \omega$ *dove* β *è la spezzata* $(0,-2) \to (1,0) \to (0,2)$.

Svolgimento. Il dominio di ω è tutto $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Conviene osservare che ω si può decomporre come somma della funzione angolo $\omega_{ang} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy$ più la forma differenziale $\omega_1 = \left(2e^{x^2y}xy + 3x^2\right) dx + \left(e^{x^2y}x^2 + 1\right) dy$ definita su $\mathbb{R}^2$ e che risulta chiusa:

$$\partial_x a_2 = \partial_x(e^{x^2y}x^2 + 1) = 2x^3ye^{x^2y} + 2xe^{x^2y} = \partial_y(2e^{x^2y}xy + 3x^2) = \partial_y a_1 \ ,$$

quindi, essendo il suo dominio semplicemente connesso, esatta. Calcoliamo una primitiva di ω_1:

$$\partial_x f(x,y) = a_1(x,y) = 2e^{x^2y}xy + 3x^2 \ \Rightarrow \ f(x,y) = \int (2e^{x^2y}xy + 3x^2)dx + h(y) = e^{x^2y} + x^3 + h(y) \ .$$

Imponiamo la seconda equazione su f

$$e^{x^2y}x^2 + \partial_y h(y) = \partial_y f(x,y) = a_2(x,y) = e^{x^2y}x^2 + 1 \ \Rightarrow \ \partial_y h(y) = 1 \ \Rightarrow \ h(y) = y \ .$$

Quindi una primitiva di ω è la funzione

$$\boxed{f(x,y) = e^{x^2y} + x^3 + y \ .}$$

A questo punto $\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_{ang} + \int_\gamma \omega_1 = 0$ in quanto l'ellisse non contiene al suo inteno $(0,0)$, quindi $\int_\gamma \omega_{ang} = 0$, e la forma ω_1 è esatta, quindi $\int_\gamma \omega_1 = 0$. Mentre per il calcolo del secondo integrale si osservi che

$$\int_\beta \omega_1 = f(0,2) - f(0,-2) = 2 + 2 = 4$$

Mentre per il calcolo dell'integrale della funzione angolo possiamo usa l'invarianza omotopica osserva che la semi-circonferenza τ di raggio 2 percorsa in senso antiorario da $-\pi/2$ a $\pi/2$ è omotopa alla spezzata β quindi

$$\int_\beta \omega_{ang} = \int_\tau \omega_{ang} = \pi$$

In conclusione

$$\int_\beta \omega = \int_\beta \omega_{ang} + \int_\beta \omega_1 = \pi + 4$$

□

4) Dato in campo vettoriale $\vec{F} := (x^2, -2yx, 4z + y)$ *e l'insieme*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le z \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 4\} \ ,$$

calcolare:

a) il flusso del campo $\vec{F}$ *entrante nella superficie chiusa definita dalla frontiera* ∂V *di* V*;*

b) il volume dell'insieme V.

Svolgimento. Osservando che $\text{div}\vec{F} = 4$ applicando il Teorema della divergenza di ha

$$4\text{Vol}(V) = \int_{\partial V} \left\langle \vec{F}, N^+_{\partial V} \right\rangle$$

dove $N^+_{\partial V}$ è il vettore normale a ∂_V uscente dalla superficie. Si osservi che l'orientamento richiesto dal problema è opposto, ossia $N^p_{\partial V} = -N^+_{\partial V}$. Quindi

$$-4\text{Vol}(V) = \int_{\partial V} \left\langle \vec{F}, N^p_{\partial V} \right\rangle$$

e per rispondere a tutte e due le domande sarà sufficiente calcolare il volume di V. Conviene usa le coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, z. Sostituite nell'equazione che definisce V danno: $1 \le z \le 2$,

$$\rho^2 + z^2 \le 4 \ \Rightarrow \ 0 \le \rho \le \sqrt{4 - z^2}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$. Quindi ricordando che la Jacobiana delle coordinate cilindriche è ρ si ha

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= \int_{1 \le z,\ x^2+y^2+z^2 \le 4} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho \, d\rho \\ &= \pi \int_1^2 dz \left(\rho^2\right)_0^{\sqrt{4-z^2}} = \pi \int_1^2 dz(4 - z^2) = \pi \left(4z - z^3/3\right)_1^2 = \pi(4 - 8/3 + 1/3) = \frac{5\pi}{3} \ . \end{aligned}$$

In conclusione

$$\boxed{\text{Vol}(V) = \frac{5\pi}{3} \quad , \quad \int_{\partial V} \left\langle \vec{F}, N^p_{\partial V} \right\rangle = -\frac{20\pi}{3} \ .}$$

$\square$

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 21 Giugno 2018

1) *Data la funzione*

$$f(x,y) = \big((x-y)^2 + y^4\big)^{\alpha} \ , \qquad \alpha > 0 \ .$$

a) Determinare al variare del parametro $\alpha > 0$ *il dominio di definizione di* f.

b) Studiare al variare di $\alpha > 0$ *la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di* f *nel dominio di definizione.*

c) Calcolare per $\alpha = 1/2$ *l'equazione del piano tangente al grafico di* f *nel punto* $(1,0)$.

Svolgimento. a) Il dominio di definizione della funzione è $\mathbb{R}^2$ per ogni $\alpha > 0$.
b) La funzione è continua in tutto il suo dominio, $\mathbb{R}^2$, per ogni $\alpha > 0$ in quanto composizione di funzioni continue (elevamento a potenza di ordine α composta con un polinomio). Per quanto riguarda la regolarità osserviamo che in generale la funzione $g(x) = x^{\alpha}$ è derivabile per $x \geq 0$ se $\alpha \geq 1$, mentre per $0 < \alpha < 1$ non è derivabile in 0. Quindi:

Per $\boxed{\alpha \geq 1}$ la funzione $f(x,y)$ risulta $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ in quanto composizione di funzioni C^{∞}. Analogamente per $\boxed{0 < \alpha < 1}$ la funzione $f(x,y)$ risulta $C^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})$. Il gradiente della funzione in questi due casi è

$$\nabla f(x,y) = \alpha\left((x-y)^2 + y^4\right)^{\alpha-1}\begin{pmatrix} 2(x-y) \\ -2(x-y) + 4y^3 \end{pmatrix} .$$

Rimane da studiare la derivabilità e la differenziabilità della funzione in $(0,0)$ per $0 < \alpha < 1$.

$\boxed{0 < \alpha < 1}$ Per quanto riguarda la derivabilià si osservi che

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2\alpha}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{2\alpha}}{x} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1/2 \\ \nexists & 0 < \alpha < 1/2 \end{cases}$$

e analogamente

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2 + 4y^4)^{\alpha}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^{2\alpha}}{y}(1 + o(1)) = \begin{cases} 0 & \alpha > 1/2 \\ \nexists & 0 < \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Quindi la funzione risulta derivabile in $(0,0)$ per $1/2 < \alpha < 1$ con gradiente pari a $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per quanto riguarda la differenziabilità per $1/2 < \alpha < 1$ passando in coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{0}) - \left\langle \nabla f(\vec{0}), \vec{x} \right\rangle}{\|\vec{x}\|} &= \frac{\big((x-y)^2 + y^4\big)^{\alpha}}{\|\vec{x}\|} \\ &\overset{coo.pol.}{=} \frac{\rho^{2\alpha}\left((\cos\theta - \sin\theta)^2 + \rho^2\sin^4\theta\right)^{\alpha}}{\rho} \\ &= \rho^{2\alpha-1}\left((\cos\theta - \sin\theta)^2 + \rho^2\sin^4\theta\right)^{\alpha} \to 0 \iff 2\alpha - 1 > 0 \ . \end{aligned}$$

Quindi la funzione risulta differenziabile in $(0,0)$ se, e solo se, $1/2 < \alpha$.

c) Per $\alpha = 1/2$ si ha $\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ quindi l'eqazione del piano tangente

$$z = f(1,0) + \left\langle \nabla f(1,0), \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + (x-1) - y = x - y \ .$$

$\square$

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{x}{(x^2-y)^{2/3}}\, dx + \frac{-1/2}{(x^2-y)^{2/3}}\, dy$$

a) Studiare la chiusura e l'esattezza di ω. Nel caso in cui la forma risulti esatta calcolarne una primitiva.

b) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva definita dall'equazione $y = e^x + 1$ per $x \in [0,1]$

Svolgimento. Il dominio di ω è formato da due componenti connesse

$D_\omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 - y \neq 0\} = D_+ \cup D_-$; $D_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 > y\}$, $D_- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 < y\}$

onguna della quali (D_+ e D_-) è semplicemente connessa. Quindi il dominio, seppur non connesso, è un indieme semplicemente connesso. La forma differenziale è chiusa

$$\partial_x a_2 = \partial_x \frac{-1/2}{(x^2-y)^{2/3}} = \frac{2x}{3\,(x^2-y)^{5/3}} = \partial_y \frac{x}{(x^2-y)^{2/3}} = \partial_y a_1 \ ,$$

quiandi, essendo il dominio semplicemente connesso, è anche esatta. Calcoliamo una primitiva f:

$$\partial_x f(x,y) = a_1(x,y) = \frac{x}{(x^2-y)^{2/3}} \ \Rightarrow\ f(x,y) = \int \frac{x}{(x^2-y)^{2/3}} dx \ + \ h(y) = \frac{3}{2}(x^2-y)^{1/3} + h(y)$$

Per determinare h imponiamo la seconda equazione su f

$$\frac{-1}{2(x^2-y)^{2/3}} + \partial_y h(y) = \partial_y f(x,y) = a_2(x,y) = frac{-}1/2(x^2-y)^{2/3} \ \Rightarrow\ \partial_y h(y) = 0$$

ossia $h(y) = cost$. Scegliendo, per semplicità, $h = 0$ otteniamo la primitiva

$$\boxed{f(x,y) = \frac{3}{2}(x^2-y)^{1/3}}$$

$b)$ Si ossevi che il sostegno della curva γ si trova nell'insieme D_-. L'integra è dato da

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f((1, 1+e)) - f(0,2)) = \frac{3}{2}(-e^{1/3} + 2^{1/3})$$

□

3) Calcolare l'ntegrale

$$\int_V (x^2(1+y^{1/3})+y^2)\,dxdydz$$

dove $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+4y^2 \le z \le 1\}$

Svolgimento. L'insieme di integrazione è simmetrico rispetto allo scambio $x \to -x$ e $y \to -y$. La funzione integranda f è formata dalla somma di tre termini

$$f(x,y,z) = x^2 + x^2y^{1/3} + y^2$$

e si osservi che il termine $x^2y^{1/3}$ da un contributo nullo in quanto è dispari rispetto all y. Quindi

$$\int_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_V (x^2+y^2)\,dxdydz$$

L'insieme di integrazione si può parametrizzare per "strati" nel modo seguente

$$0 \le z \le 1\ ,\ 0 \le x^2+4y^2 \le z$$

Quindi

$$\int_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^1 dz \int_{\{0\le x^2+4y^2\le z\}} \{x^2+y^2)\,dxdy$$

Per calcolare il primi integrale passimo in coordinate ellittiche:

$$x = \rho\cos\theta\ ,\ y = (1/2)\rho\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \rho \le \sqrt{z}\quad ,\quad \theta \in [0,2\pi]$$

la matrice Jacobiana della trasformazione risulta

$$J(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & (1/2)\sin\theta \\ -\rho\sin\theta & (1/2)\rho\cos\theta \end{pmatrix} \quad , \quad |\det J(\rho,\theta)| = \frac{\rho}{2}\ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_V f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_0^1 dz \int_{\{0\le x^2+4y^2\le z\}} (x^2+y^2)\,dxdy \\
&= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} d\rho\,\frac{\rho}{2}(\rho^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}\rho^2\sin^2\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{4})) \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} d\rho\frac{\rho^3}{2} \\
&= (\pi + \pi/4)\int_0^1 dz\frac{z^2}{8} = \frac{5\pi}{4}\frac{z^3}{24}\Big|_0^1 \\
&= \frac{5\pi}{96}
\end{aligned}$$

$\square$

4) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x, y, 0)$ attraverso la superficie $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \ , \ 0 \leq z\big\}$ orientata in modo che la terza componente del vettore normale sia negativa. Calcolare, inoltre, il volume dell'insieme $V = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \ , \ 0 \leq z\big\}$.

Svolgimento. Si osservi che la divergenza di $\vec{F}$ è costante ed uguale $\mathrm{div}\vec{F} = 2$. Quindi, dal momento che la divergenza del campo fornisce un contributo non nullo, per calcolare il flusso potremmo applicare direttamente la definizione di flusso e calcolare l'integrale. Tuttavia se vogliamo comunque applicare il teorema della divergenza chiudiamo prima la superficie con il disco

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2/4 = 1 \ , \ z = 0\}$$

e orientiamo la superficie chiusa $\Sigma = S \cup D$ verso l'esterno. Allora si osservi il volume interno alla superficie Σ è esattamente il volume V del punto b) e che

$$2\mathrm{vol}(V) = \int_V \mathrm{div}\vec{F} = \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{S+} \right\rangle + \int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{D+} \right\rangle = \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{S+} \right\rangle$$

dove $\vec{N}_{S+}, \vec{N}_{D+}$ sono i vettori normali a S e D, rispettivamente, orientati verso l'esterno di Σ, e dove si è osservato che $\left\langle \vec{F}, \vec{N}_{D+} \right\rangle = 0$ in quanto la terza componente di $\vec{F}$ è nulla. Quindi per risolvere i punti a) e b) possiamo o calcolare il volume di V o calcolare il flusso fi $\vec{F}$ attraverso S. Procediamo calcolando il volume di V usanto coordinate ellissoidali:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin\varphi \cos\theta \\ 2\rho \sin\varphi \sin\theta \\ 3\rho \cos\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad J(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\theta & 2 \sin\varphi \sin\theta & 3 \cos\varphi \\ \rho \cos\varphi \cos\theta & 2\rho \cos\varphi \sin\theta & -3\rho \sin\varphi \\ -\rho \sin\varphi \sin\theta & 2\rho \sin\varphi \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$0 \leq \rho \leq 1 \ , \ \varphi \in [0, \pi/2] \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

ottenute sostituento le coordiante ellissoidali nelle relazioni che definiscono V. Si noti in particolare che $\det J(\rho, \varphi, \theta) = 6\rho^2 \sin\varphi$. Quindi

$$\mathrm{vol}(V) = \int_V dxdydz = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin\varphi \int_0^1 d\rho \rho^2 = 12\pi \cdot \left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right) \cdot \left(\rho^3/3\Big|_0^1\right) = 4\pi \ .$$

Quindi

$$\boxed{\mathrm{vol}(V) = 4\pi}$$

mentre $\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{S+} \right\rangle = 2\mathrm{vol}(V) = 8\pi$. Tuttavia l'orientamento di S richiesto nel punto a) indicato con $\vec{N}_{S^p}$ è opposto a S^+. In conclusione si ha

$$\boxed{\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{S^p} \right\rangle = -\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{S+} \right\rangle - 8\pi \ .}$$

□

5) Data l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = e^{2t} + \sin(t)$$

Trovare la soluzione generale dell'equazione e risolvere il problema di Cauchy con dato iniziale $\dot{x}(0) = x(0) = 0$.

Svolgimento. Si tratta di un'equazione differenziale lineare e del secondo ordine. Risolviamo l'omogenea: le radici del polinomio caratteristico sono

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad , \quad \lambda_+ = 3 \ , \ \lambda_- = 2$$

quindi

$$\boxed{x_{om}(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}}$$

Il termine noto $f(t)$ è combinazione lineare di due funzioni $f_1(t) = e^{2t}$ e $f^2(t) = \sin(t)$. Troviamo due soluzioni particolari y_i corrispondente al termine noto f_i, per $i = 1, 2$, e per linearità la funzione $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ sarà una soluzione particolare corrispondente a termine noto $f(t)$.

Cominciamo trovando una soluzione particolare corrispondente al termine noto $f_1(t) = e^{2t}$. Osservando che 2 è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea cerchiamo una soluzione della forma $y_1(t) = Kte^{2t}$. Sostituendo nell'equazione si ha :

$$\ddot{y_1} - 5\dot{y_1} + 6y_1t = e^{2t} \iff K(2e^{2t} + 2e^{2t} + 4te^{2t} - 5(e^{2t} + 2te^{2t}) + 6te^{2t}) = K(4e^{2t} - 5e^{2t}) = e^{2t}$$

Quindi $K = -1$ e $y_1(t) = -te^{2t}$.

Per il termine noto $f^2(t) = \sin(t)$ cerchiamo una soluzione particolare della forma $y_2(t) = C\sin(t) + D\cos(t)$, che sostituita nell'equazione

$$-C\sin(t) - D\cos(t) - 5(C\cos(t) - D\sin(t)) + 6(C\sin(t) + D\cos(t)) = \sin(t)$$

da cui

$$\sin(t)(5D+5C)+\cos(t)(-5C+5D) = \sin(t) \iff D-C = 0 \ , \ D+C = 1/5 \ , \iff D = C = 1/10$$

Quindi $y_2(t) = \frac{1}{10}(\sin(t) + \cos(t))$. Quindi una soluzione particolare è

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = -e^{2t} + \frac{1}{10}(\sin(t) + \cos(t))$$

e la soluzione generale dell'equazione è

$$\boxed{x_{Gen}(t) = Ae^{3t} + Be^{2t} - te^{2t} + \frac{1}{10}(\sin(t) + \cos(t))}$$

Imponimo sa luzione del problema di Cauchy:

$$x_{Gen}(0) = 0 = A + B + \frac{1}{10} \quad , \quad \dot{x}_{Gen}(0) = 0 = 3A + 2B - \frac{9}{10}$$

da cui $B = -12/10$ e $A = 11/10$. Quindi la soluzione del problema di Cacuchy

$$\boxed{x_{Cauchy}(t) = \frac{11}{10}e^{3t} - \frac{12}{10}e^{2t} - te^{2t} + \frac{1}{10}(\sin(t) + \cos(t)) \ .}$$

□

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 29 Gennaio 2018

1) *Sia data la funzione*

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 8$$

a) Studiare l'esistenza di massimi e minimi assoluti della funzione f nella regione

$$Z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1\}$$

b) Calcolare la derivata di f in $(0,2)$ lungo la direzione definita dal versore $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ e l'eqazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $(0,0)$.

Svolgimento. a) La funzione f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ cosi come la funzione $g(x,y) = 4x^2+y^2-1$ che definisce il vincolo (un'ellisse). Essendo il vincolo chiuso e limitato per il teorema di Weierstrass la funzione f ha massimo e minimo assoluto sul vincolo. Inoltre essendo il vincolo chiaramente regolare possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare i punti estremali vincolati. Imponiamo l'annulamento del gradiente della funzione di Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 8 + \lambda(4x^2 + y^2 - 1) \ ,$$

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2-1) + 8\lambda x) \\ 4y(x^2+y^2-1) + 2\lambda y) \\ 4x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2-1+2\lambda) \\ 2y(2x^2+2y^2-2+\lambda) \\ 4x^2+y^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dalla prima equazione si ha $x = 0$ e $2\lambda = 1 - x^2 - y^2$. Partiamo da $\boxed{x = 0}$. Il vincolo implica che $y = \pm 1$. Usando la seconda equazione si ha$\lambda = 0$. Quindi abbiamo come punti critici $(0, \pm 1, 0)$.

Consideriamo ora $\boxed{2\lambda = 1 - x^2 - y^2}$. L'equazione del vincolo implica che $1 - y^2 = 4x^2$ da cui $2\lambda = -x^2 + 4x^2 = -3x^2$. Sostituendo queste due relazione nella seconda si ha

$$\pm\sqrt{1 - 4x^2}\ (4x^2 + 4y^2 - 4 + 2\lambda) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0 \ , \ x = \pm 1/2$$

La prima $x = 0$ è stata gia trovata. Per $x = \pm 1/2$ si ha $y = 0$ e $\lambda = -3/8$. Quindi gli altri due punti critici sono $(\pm 1/2, 0, -3/8)$. Infine

$$f(0,\pm 1) = 8 \ , \ f(\pm 1/2, 0) = \frac{9}{16} + 8 = \frac{137}{16}$$

quindi $(0, \pm 1)$ **sono di minimi assoluti mentre** $(\pm 1/2, 0)$ **sono massimi assoluti**.

b) Dal momento che la funzione è differenziabile si ha

$$D_{\vec{v}} f(0,2) = \langle \nabla f(0,2), \vec{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{-24}{\sqrt{2}} \ .$$

Infine per il piano tangente si ha

$$z = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), \vec{x} \rangle = 9$$

□

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{6x}{y - x^2 + 1}\, dx - \frac{3}{y - x^2 + 1}\, dy$$

a) Stabilire se ω è chiusa; se è esatta e, in caso affermativo, calcolarne una primitiva.

b) Calcolare l'integrale di ω lungo la spezzata γ che unisce i punti $(3,0) \to (-1,-4) \to (-2,0)$.

c) Calcolare l'integrale di ω lungo il segmento β che unisce i punti $(0,0) \to (1,3)$.

Svolgimento La forma differenziale è definita nell'insieme $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{y - x^2 + 1 = 0\}$. Si osservi che l'insieme non è connesso ed è formato da due componenti connesse

$$D_+ := \{y > x^2 - 1\} \quad , \quad D_- := \{y < x^2 - 1\}$$

con D_+ e D_- semplicemente connessi (non si sono lacune). La forma differenziale risulta chiusa infatti

$$\partial_y a_1 = \partial_y \frac{6x}{y - x^2 + 1} = -\frac{6x}{(y - x^2 + 1)^2} = \partial_x \frac{-3}{y - x^2 + 1} = \partial_y a_2$$

Ora nel caso in cui il dominio non è connesso una forma differenziale è esatta se la restrizione alle componenti connesse è esatta, in altre parole se per ogni componente connessa la restrizione della forma alla componente connessa ammette una primitiva. Dato che la forma è chiusa e le componenti connesse sono semplicemente connesse la forma è esatta. Calcoliamo una primitiva:

$$\partial_x f = a_1 = \frac{6x}{y - x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = -3 \ln |y - x^2 + 1| + h(y)$$

e

$$\frac{-3}{y - x^2 + 1} + \partial_y h(y) = \partial_y f = a_2 = \frac{-3}{y - x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad h(y) = cost \ .$$

Quindi data la funzione

$$\boxed{f(x,y) = -3 \ln |y - x^2 + 1|}$$

e posto

$$f_+(x,y) := -3 \ln(y - x^2 + 1) \ , \qquad (x,y) \in D_+$$
$$f_-(x,y) := -3 \ln(-y + x^2 - 1) \ , \qquad (x,y) \in D_-$$

si ha che f_+, f_- sono delle primitive di ω quando ristretta a D_+ e D_- rispettivamente.

Per il calcolo degli integrali curvilinei osserviamo che la prima curva γ appartiene alla regione D_- quindi

$$\int_\gamma \omega = f_-(\gamma(1)) - f_-(\gamma(0)) = f_-(-2,0) - f_-(3,0) - 3\ln(3) + 3\ln(8) = 3\ln(8/3)$$

La seconda curva si trova nella regione D_+ quindi

$$\int_\beta \omega = f_+(\beta(1)) - f_+(\beta(0)) = f_+(1,3) - f_+(0,0) = -3\ln(3) \ .$$

3) Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{e^{y^2} x + y}{\sqrt{x^2+4y^2}}\, dxdy$$

dove $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 1 \leq x^2 + 4y^2 \ , \ 0 \leq y\}$

Svolgimento. L'insieme A è invariante per lo scambio $x \to -x$, quindi $\int_A \frac{e^{y^2} x}{\sqrt{x^2+4y^2}}\, dxdy = 0$ e

$$\int_A \frac{e^{y^2} x + y}{\sqrt{x^2+4y^2}}\, dxdy = \int_A \frac{y}{\sqrt{x^2+4y^2}}\, dxdy \ .$$

Per calcolare l'integrale usiamo le coordinate ellittiche

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \frac{1}{2}\rho\sin\theta$$

che sostistuite nelle equazioni che definiscono A:

$$\rho^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}\rho^2\sin^2\theta \leq 1 \quad , \quad 1 \leq \rho^2 \quad , \quad 0 \leq \sin\theta \ .$$

La seconda e terza relazione implicano che $1 \leq \rho$ e $\theta \in [0, \pi]$. La prima

$$4\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \leq 4 \iff 3\rho^2\cos^2\theta + \rho^2 \leq 4 \iff \rho^2 \leq \frac{4}{3\cos^2\theta + 1}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{y}{\sqrt{x^2+4y^2}}\, dxdy &= \int_0^\pi d\theta \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3\cos^2\theta+1}}} d\rho \frac{\rho}{2}\frac{(1/2)\rho\sin\theta}{\rho} = \frac{1}{4}\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3\cos^2\theta+1}}} d\rho\rho \\
&= \frac{1}{8}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\left(\frac{4}{3\cos^2\theta+1} - 1\right) = \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{3\cos^2\theta+1} - \frac{1}{8}\int_0^\pi d\theta\sin\theta \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{3}}\int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} dt \frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{8}\cos\theta\Big|_0^\pi = \frac{\arctan\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

□

4) Sia S la superficie chiusa formata dall'unione del disco $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1 \;,\; z = 1\}$ e dalla superficie di rotazione σ intorno all'asse z generata dalla curva $z = y^3$ per $0 \leq y \leq 1$.

a) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} := (0, -2y, 0)$ uscente dalla superficie S.

b) Calcolare il volume del solido racchiuso dalla superficie S.

Svolgimento. $a)$ La superficie di rotazione in forma parametrica risulta

$$\sigma(t,s) = \begin{pmatrix} t\cos\theta \\ t\sin\theta \\ t^3 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0,1] \;,\; \theta \in [0,2\pi] \;,$$

il cui vettore normale, orientato in accordo con quanto richiesto dal problema, è

$$\vec{N}_\sigma(t,\theta) = \partial_\theta \sigma(t,\theta) \wedge \partial_t \sigma(t,\theta) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -t\sin\theta & t\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^3\cos\theta \\ 3t^3\sin\theta \\ -t \end{pmatrix} \;.$$

Si osservi che il vettore normale del disco D è parallelo all'asse z è che il campo vettoriale ha solo componente y non nulla. Quindi il disco D non da alcun contributo al calcolo del flusso. Quindi

$$\begin{aligned}\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle &= \int_\sigma \left\langle \vec{F}, \vec{N}_\sigma \right\rangle + \int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle = \int_\sigma \left\langle \vec{F}, \vec{N}_\sigma \right\rangle \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dt - 6t^4 \sin^2\theta = \frac{-6\pi}{5} \;.\end{aligned}$$

$b)$ Per il teorema della divergenza sappiamo che

$$\int_V \mathrm{div}\vec{F} = \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle$$

dove V indica il volume interno alla superficie S. Dato che la divergenza del campo è costante $\mathrm{div}\vec{F} = -2$ si ha

$$\frac{-6\pi}{5} = \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle = \int_V \mathrm{div}\vec{F} = -2\int_V = -2|V| \quad \Rightarrow \quad |V| = \frac{3\pi}{5} \;.$$

$\square$

__5)__ Data l'equazione differenziale

$$\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} = te^t \ .$$

Trovare la soluzione generale dell'equazione e risolvere il problema di Cauchy con dati iniziali $\ddot{x}(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 1$

Svolgimento. Il polinomio caratteristico associato all'equazione ha le seguenti radici

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)^2 \iff \lambda = 0, 1$$

Quindi 1 ha molteplicità 2 e la soluzione dell'omogenea è

$$x_o(t) = A + e^t(B + Ct) \ .$$

Per calcolare una soluzione particolare procediamo per similitudine osservando che nel teremine noto è presente una radice del polinomio caratteristico ($\lambda = 0$) con molteplicità 2:

$$f(t) = te^t = \ .$$

Quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma $y(t) = t^2(K_1 + K_2t)e^t$. Osservando che $z(t) = (K_1 + K_2t)e^t$ è soluzione dell'omogenea e che $y = t^2z$,e

$$\dot{y} = 2tz + t^2\dot{z} \ , \ \ddot{y} = 2z + 4t\dot{z} + t^2\ddot{z} \ , \ \dddot{y} = 6\dot{z} + 6t\ddot{z} + t^2\dddot{z}$$

che sostituita nell'equazione da

$$6\dot{z} + 6t\ddot{z} - 2(2z + 4t\dot{z}) + 2tz = te^t \ .$$

Ora

$$\dot{z} = e^t(K_1 + tK_2) + K_2e^t \ , \ \ddot{z} = e^t((K_1 + 2K_2) + tK_2)$$

Sostituendo nell'equazione di sopra si ha

$$\begin{aligned} t &= 6(K_1 + K_2) + 6tK_2 + 6tK_1 + 12tK_2 + 6t^2K_2 - 4K_1 - 4tK_2 - 8tK_1 - 8tK_2 - 8t^2K_2 + 2tK_1 + 2t^2K_2 \\ &= (6K_1 + 6K_2 - 4K_1) + t(6K_2 + 6K_1 + 12K_2 - 4K_2 - 8K_1 - 8K_2 + 2K_1) \\ &= (2K_1 + 6K_2) + t(6K_2) \end{aligned}$$

da cui si ha $K_2 = 1/6$ e $K_1 = -3K_2 = -1/2$. Quindi la soluzione generale sarà

$$x_{Gen}(t) = A + e^t(B + Ct) + \frac{t^2}{6}(-3 + t)e^t$$

b) Risolviamo il problema di Cauchy imponendo le condizioni iniziali

$$x_G(0) = A + B = 1 \ , \ \dot{x}_G(0) = B + C = 0 \ , \ \ddot{x}_G(0) = B + 2C - 1 = 0$$

da cui si ottiene $C = 1$, $B = -1$ e $A = 2$ quindi

$$x_{Cauchy}(t) = 2 + e^t(-1 + t) + \frac{t^2}{6}(-3 + t)e^t$$

$\square$