

1) Sia f l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 definito da:

$$f(e_1) = -2e_2 + e_3, f(e_2) = 2e_1 - e_3, f(e_3) = -e_1 + e_2;$$

dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^3 , e sia $g = f^2$.

- Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica;
- Trovare una base di $\ker(f)$ e una di $\text{Im}(f)$;
- Per ogni autovalore reale di f trovare una base per l'autospazio corrispondente;
- Trovare gli autovalori di g ed una base per gli autospazi corrispondenti;
- Stabilire se esiste una base ortonormale di autovettori di g e in caso affermativo trovarne una.

2) Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4

$$W_1 = \text{Span}((1, 1, 1, -2), (0, 0, 1, -1));$$

$$W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z - w = 0\}.$$

Trovare dimensione e base di W_2 e di $W_1 \cap W_2$.

3) Dato il punto $P(1, 1, 1)$, trovare l'equazione del piano π passante per P , parallelo alla retta $r: y=z=0$ e perpendicolare al piano $\alpha: 3x + 2y - z = 1$.

Soluzioni

1) La matrice che rappresenta f nella base indicata è $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Una possibile riduzione a scala di A è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, per cui: rango di $A = \dim(\text{Im}(f)) = 2$,

base di $\text{Im}(f) = \{(0, -2, 1), (2, 0, -1)\}$ (equazione cartesiana $x+y+2z=0$).

$\dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\text{Im}(f)) = 1$, una base di $\ker(f) = \ker(A)$ è data dal vettore $v_1 = (1, 1, 2)$.

Il polinomio caratteristico di f è:

$$p_f(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 2 & -1 \\ -2 & -t & 1 \\ 1 & -1 & -t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -t+2 & 2 & -1 \\ -2-t & -t & 1 \\ 0 & -1 & -t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2t & 2-t & 0 \\ -2-t & -t & 1 \\ 0 & -1 & -t \end{pmatrix} =$$

$$= -2t(t^2 + 1) - [(2-t)(2+t)t] = -t(t^2 + 6).$$

Gli autovalori di f sono quindi: $0, \sqrt{-6}, -\sqrt{-6}$.

L'unico autovalore reale è 0 e l'autospazio corrispondente è il $\ker(f)$ determinato in precedenza. (Osserviamo che f come operatore complesso è diagonalizzabile).

La matrice associata a g è $B = A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, matrice simmetrica e quindi "ortogonalmente diagonalizzabile"

(ossia in \mathbb{R}^3 esiste una base ortonormale di autovettori di g). Si ha:

$$p_g(t) = \det(B - tI) = \det \begin{pmatrix} -5-t & 1 & 2 \\ 1 & -5-t & 2 \\ 2 & 2 & -2-t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -6-t & 6+t & 0 \\ 1 & -5-t & 2 \\ 2 & 2 & -2-t \end{pmatrix} = (t+6) \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5-t & 2 \\ 2 & 2 & -2-t \end{pmatrix}$$

$$= (t+6) \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4-t & -5-t & 2 \\ 4 & 2 & -2-t \end{pmatrix} = t(t+6)^2.$$

Quindi: autovalori di $g=f^2$ sono $0, -6, -6$. In effetti, gli autovalori di f^2 sono il quadrato degli autovalori di f (perchè?), e non è necessario effettuare il calcolo esplicito del polinomio caratteristico di g per determinarli, inoltre l'autospazio di g relativo all'autovalore nullo, $\ker(g)$, è uguale all'autospazio relativo all'autovalore 0 di f , ossia $\ker(f)$.

L'autospazio di g relativo all'autovalore $-6 = \ker(B+6I)$ è il piano ortogonale alla retta $\ker(g)$ (questo perchè B è simmetrica) e quindi è il piano di equazione $x+y+2z = 0$. Una sua possibile base "ortogonale" è data dai vettori $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (1, 1, -1)$.

I vettori: $1/\sqrt{6} v_1, 1/\sqrt{2} v_2, 1/\sqrt{3} v_3$, sono una base ortonormale di autovettori di g .

2) W_2 è l'insieme delle soluzioni di (un sistema lineare di) una equazione in 4 incognite, l'equazione è omogenea quindi W_2 è un sottospazio vettoriale e $\dim(W_2) = 3$. Una base di W_2 è per esempio data dai suoi tre vettori indipendenti $\{(2, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$.

Determiniamo equazioni cartesiane per W_1 :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y & 0 & 0 & y-x \\ 1 & 1 & z & \rightarrow & 0 & 1 & z-x \\ -2 & -1 & w & 0 & 0 & x+z+w \end{array}.$$

Le equazioni cartesiane di W_1 sono quindi: $x-y = 0, x+z+w = 0$.

Equazioni cartesiane di $W_1 \cap W_2$: $x-y = 0, x+z+w = 0, x+2y-z-w = 0$, oppure il sistema equivalente

$x = 0, y = 0, z+w = 0$. Così, $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$, ed una base per questa retta è il vettore $(0,0,1,-1)$.

3) La retta r' per P parallela ad r ha equazioni $y-1 = 0, z-1 = 0$. L'equazione del fascio di piani di centro la retta r' è. $y-1+k(z-1) = 0$. Imponendo la condizione di perpendicolarità con il piano α , ossia il prodotto scalare tra i vettori $(3,2,-1)$ e $(0,1,k)$ uguale a 0, otteniamo $k = 2$. Così, equazione di $\pi : y + 2z - 3 = 0$.

Equazione parametrica di $\pi : (x, y, z) = t(1, 0, 0) + s(3, 2, -1) + (1, 1, 1)$.

1) In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tale che } x+2y=0 \right\};$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tale che } x+w=0, y+2z=0 \right\};$$

Determinare base e dimensione di H, K, $H \cap K$ e $H+K$.

2) Data la forma quadratica $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$q(x,y,z,w) = x^2 + 2y^2 + z^2 + w^2 - 2xy - 2yz;$$

trova una forma canonica metrica di q e indica il cambio di coordinate effettuato per scrivere q in forma canonica.

3) Date le rette r: $x-y+z=0, y+3z=0$, ed s: $x+y-1=0, y+3z-2=0$;

a) Verifica che sono sghembe;

b) Trova la minima distanza tra r ed s.

Soluzioni

1) H è il sottospazio delle soluzioni del "sistema" lineare omogeneo dato da 1 equazione in 4 incognite, quindi $\dim(H)=3$, una

$$\text{sua base } \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\dim(K)=2, \text{ base } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$H \cap K \text{ è la retta generata da } \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ e } H+K = M_2(\mathbb{R}).$$

2) La matrice associata alla forma quadratica q è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Il polinomio caratteristico di A è } \det(A-tI) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ -1 & 2-t & -1 \\ 0 & -1 & 1-t \end{pmatrix} = \\ &= (1-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & t-1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ 0 & -1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ 0 & -1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-t & -2 \\ 0 & -1 & 1-t \end{pmatrix} = \\ &= (1-t)^2 \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix} = t(t-1)^2(t-3). \end{aligned}$$

Gli autospazi sono:

Autospazio relativo all'autovalore 1 il piano generato dai versori $\{(0,0,0,1), (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)\}$;

Autospazio relativo a 3 la retta $\text{Span}((1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0))$;

Autospazio relativo all'autovalore 0, il $\ker(A)$, la retta $\text{Span}((1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0))$.

Indicata con C la matrice ortogonale che ha per colonne i quattro versori precedenti e con (x', y', z', w') le coordinate dei vettori in questa nuova base ortonormale, mediante il cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \text{ l'espressione della forma quadratica diventa } q(v) = (x')^2 + (y')^2 + 3(z')^2 \text{ (forma canonica metrica di q).}$$

3) I parametri direttori delle due rette sono rispettivamente $(4, 3, -1)$ e $(3, -3, 1)$ (soluzioni dei sistemi omogenei associati alle equazioni di r di s), quindi le rette non sono parallele. Calcoliamo la loro minima distanza, se la distanza è maggiore di 0 le due rette non sono incidenti (quindi sghembe).

Troviamo il piano π per r parallelo ad s, la distanza cercata sarà data dalla distanza tra un punto (qualsiasi) di s, per esempio $P(-1, -2, 0)$, e π .

$$\text{Equazione di } \pi : \text{ fascio di piani di centro r : } y+3z+k(x-y+z)=0, \text{ condizione di parallelismo con s: } \begin{pmatrix} k \\ 1-k \\ 3+k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

quindi $k=0$ ed equazione di π $y+3z=0$. Segue che la distanza cercata è ("formula" della distanza punto,piano) $2/\sqrt{10}$.