1 | 26/09/19 | (1)

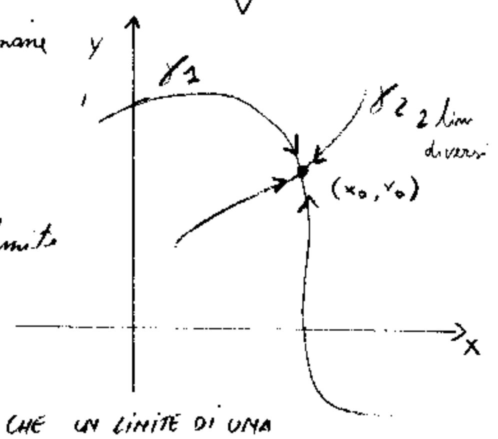
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0} f(x) \longleftarrow \exists\ \gamma_1, \gamma_2 \text{ curve passanti per } x_0 \text{ e tali che}$$

$$x \in |\gamma_1| \qquad x \in |\gamma_2|$$

$\Downarrow$

$\lim_{x \to x_0}$ con x che rimane sul sostegno di γ_1 e $\lim \ldots$ di γ_2.

Se sono diversi il limite non esiste.



• Per dimostrare che un limite non esiste.

È UNA CONSEGUENZA DEL TEOREMA PONTE: SE ESISTONO QUESTE 2 CURVE POSSO TROVARE DUE SUCCESSIONI DI PUNTI CHE CONVERGONO AL MIO PUNTO.

$$\exists \{x_K\} \subset |\gamma_1| \qquad x_K \to x_0$$

"contenuto nel sostegno di γ_1"

$$\exists \{y_K\} \subset |\gamma_2| \qquad y_K \to x_0$$

UN MODO PER DIRE CHE UN LIMITE DI UNA FUNZIONE A PIÙ VARIABILI <u>NON ESISTE</u> È QUELLO DI CERCARE DUE CURVE CON QUESTA PROPRIETÀ. (non posso dire nulla sull'esistenza)

uguali ai limiti di prima — Th. PONTE

$$\boxed{\lim_{K \to +\infty} f(x_K) \neq \lim_{K \to \infty} f(y_K) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)}$$

$\frac{0}{0}$ forma indeterminata

$\uparrow$ Usiamo il sistema appena detto

Esempio:

(a) $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Rette $y = mx$ $\quad m \in \mathbb{R}$ che passano per l'origine

2 m diversi $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 2 limiti diversi ■

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x(mx)}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \quad \text{dipende da } m \ ■$$

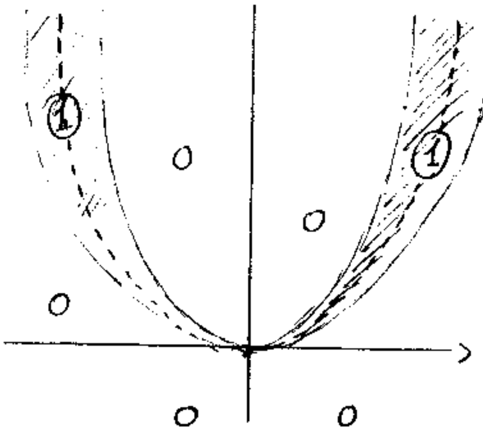
limite della funzione ristretta a queste rette.

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \ ■$$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ mi chiedo: $\exists ? \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Come prima prendo tutte le rette passanti per l'origine.

$y = mx \Rightarrow f(x,mx) = \begin{cases} 1 & x^2 < mx < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



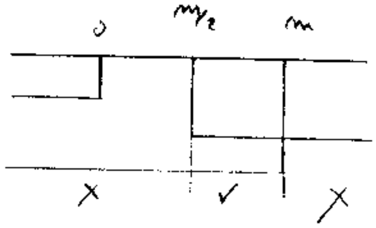
RISOLVIAMO PRIMA LE DISUGUAGLIANZE:

- $x^2 < mx \iff x^2 - mx = x(x-m) < 0$ parabola verso l'alto $\Updownarrow$ $\boxed{\text{se } m > 0}$ $\underline{0 < x < m}$

- $mx < 2x^2 \iff 2x^2 - mx > 0 = x(2x-m) > 0 \iff \underline{x < 0}$ e $\underline{x > \frac{m}{2}}$

Qualunque sia la retta che passa per l'origine, il lim=0

$f(x,mx) = \begin{cases} 1 & \frac{m}{2} < x < m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Leftarrow$



$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = 0$

SE PROVO UNA CURVA CHE NON SIA UNA RETTA:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) = 1$

$y = \frac{3}{2}x^2 \rightsquigarrow$ parabola in mezzo alle due (∪)

Dato che $\underline{x^2 < \frac{3}{2}x^2 < 2x^2}$ allora $\Rightarrow f\left(x, x^2\frac{3}{2}\right) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$

limite non esiste

Perché? Non sembra che i limiti siano differenti.

2 (26)

ⓐ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\log(1+x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} + \cos(x+y)$$

PER FORZA IL LIMITE È 1 SE $\exists$

Per esempio lo calcolo per $y=0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \cos x = \underline{1} \Rightarrow \text{se il lim } \exists \Rightarrow \ell = 1$$

$y=0$ → Vale per tutte le rette passanti per l'origine.

Potrebbe esistere una curva differente per cui il limite è diverso da 1.

DIMOSTRIAMO CHE IL LIMITE È UNO:

ⓑ. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x+y) = \cos(0) = 1 \Rightarrow$ Verificare che il resto $= 0$

[SE $a = b + c$ e $a=1$ e $b=1$]
[ALLORA $c=0$]
deve fare zero.

SE NON CI SONO FORME INDETERMINATE IL LIMITE DELLA SOMMA È LA SOMMA DEI LIMITI

ⓒ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overset{0}{y}\log(1+\overbrace{x^2+3y^2}^{0})}{\underbrace{x^2+5y^2}_{0}} = 0$$

$$\frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$ LIMITE NOTEVOLE.

MI BASTA FARE QUESTO LIMITE QUA.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\log(1+x^2+3y^2)}{x^2+3y^2}\right|^{\to 1} \cdot \frac{y(x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} =$$

MAGGIORIAMO

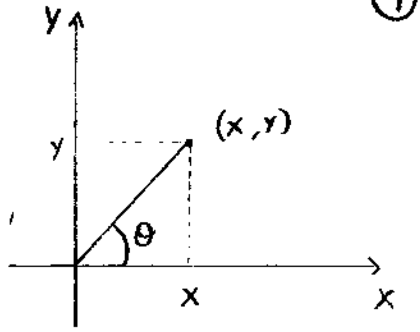
SOMMO $2y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y(x^2+3y^2)}{x^2+5y^2}\right| = \frac{|y|(x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} \le |y| \frac{x^2+5y^2}{x^2+5y^2} = |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Coordinate polari nel piano (r, θ)

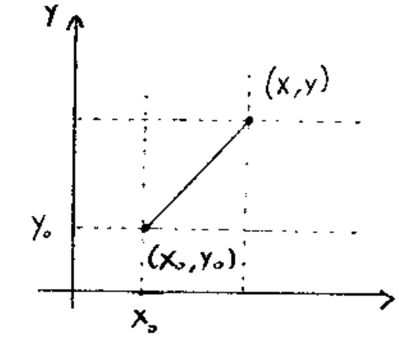
Quando il polo è $(0,0)$

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2 \Leftarrow \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



$\theta>0$ antiorario

$\theta<0$ orario



Coordinate polari con polo (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x = x_0+r\cos\theta \\ y= y_0+r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Per definizione:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)= l \quad l\in\mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

$\Downarrow$ allora

$$|f(x,y)-l|<\varepsilon$$

Coordinate polari con polo (x_0, y_0)

$\rightarrow$ deve valere per ogni θ $\rightarrow$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \Big| \quad 0<\underset{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r}{r}<\delta \quad \Rightarrow \left|f(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta)-l\right|<\varepsilon \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$$

dire che, in coordinate polari $\rightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \Big| \quad 0<r<\delta \Rightarrow$$ anche il suo estremo superiore $\le\varepsilon$

$$\overset{\lim_{r\to0}}{\Rightarrow} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta)-l|\le\varepsilon \Longleftrightarrow \lim_{r\to0}\ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(x_0+r\ldots)-l|=0$$

$\hookrightarrow$ avendo fatto l'estremo superiore, ora f dipende solo da r.

NEGLI ESERCIZI SPESSO SI FA L'ERRORE DI CALCOLARE IL lim IN COORDINATE POLARI, DIRETTAMENTE PER $r\to 0$.

(26) $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = l$ $(x_0, y_0) = (0,0)$ (5)

$\not\Downarrow$ $\boxed{NO}$ SE DICO, NON IMPLICA CHE LA FUNZIONE SIA UGUALE A l. (è come se facessi il limite su tutte le rette, non tutte le curve).

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$

BISOGNA MAGGIORARE PER TROVARE UNA FUNZIONE CHE DIPENDE SOLO DA r.

Se $\exists\, g(r)$ t.c. $\left| f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - l \right| \le g(r)$ $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ $\forall r > 0$

$\boxed{SI}$

funzione che dipende solo da r e non da θ, allora anche l'estremo sup sarà maggiorato

e $\lim_{r\to 0} g(r) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$

VALE ANCHE PER LIMITI INFINITI. senza modulo. MINORARE

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty \overset{\text{in C.P.}}{\Longleftrightarrow} \lim_{r\to 0} \inf_{\theta\in[0,2\pi]} \left\{ f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \right\} = +\infty$$

MAGGIORARE

$$\text{''} \quad \ldots = -\infty \Longleftrightarrow \lim_{r\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \left\{ \text{''} \right\} = -\infty$$

Esempi:

STUDIARE QUESTO LIMITE AL VARIARE DI α.

(a) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \overbrace{\frac{(x^2 - 2x + 1)\,y}{[(x-1)^2 + y^2]^\alpha}}^{f(x,y)}$$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ C.P. $\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow$

QUESTO È IL LIMITE PER TUTTE LE RETTE:

$$\Rightarrow f(1 + r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta}{[r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta]^\alpha} = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^{2\alpha}} = r^{3-2\alpha}\cos^2\theta\sin\theta \to 0$$

per $r\to 0$ $\boxed{\text{se } 3 - 2\alpha > 0}$

NON È DETTO CHE IL lim SIA ZERO

MAGGIORIAMO → non deve dipendere da θ e deve tendere a zero.

$$\left|f(1+\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\right| = \left|\rho^{3-2\alpha}\underbrace{\cos^2\theta\sin\theta}_{\text{maggiorato}}\right| \le \rho^{3-2\alpha} \to 0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$$

se $3-2\alpha>0$

⑥

↓ ORA POSSIAMO DIRE CHE

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 \quad \text{se } \alpha<\tfrac{3}{2}}$$ ∎

$\boxed{\alpha=\frac{3}{2}}$ $f(1+\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \cos^2\theta\sin\theta \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$

• PERCHÉ QUI NON ABBIAMO MAGGIORATO?

$\boxed{\alpha>\frac{3}{2}}$ $f(1+\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \dfrac{\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^{2\alpha-3}\to 0} \to \begin{cases} +\infty & \sin\theta>0 \\ -\infty & \sin\theta<0\end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$

$$(a) = \begin{cases} 0 & \alpha<\frac{3}{2} \\ \nexists & \alpha\ge\frac{3}{2}\end{cases}$$

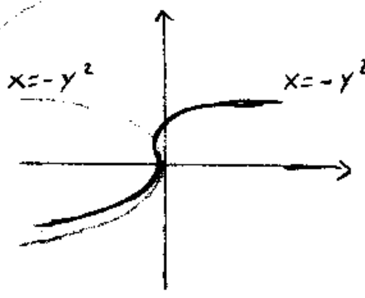
C.P. NON FINISCE QUI

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y^2} \to f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^2\sin\theta\cos\theta}{\rho\cos\theta+\rho^2\sin^2\theta} \to 0 \quad \rho\to 0 \quad \forall\theta$

limite è zero su tutte le rette.

↓ DEVO MAGGIORARE IN MODULO, MA QUI NON CI RIESCO.

IL DENOMINATORE PUÒ FARE ZERO SE:
↳ se $x=-y^2$
↳ f può $\to\infty$



$\boxed{x=-y^2+y^3}$ → CURVA CHE PASSA PER L'ORIGINE CHE PASSA TANGENTE A QUELLA PARABOLA.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y^2} = \frac{(-y^2+y^3)y}{-y^2+y^3+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^3+y^4}{y^3} = -1 \ne 0 \Rightarrow$$

$x=-y^2+y^3$

↳ HO TROVATO UNA CURVA IL CUI $\lim \ne 0$ PER IL Th PONTE

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y^2}$$

4 (26)

(7)

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}$ $\qquad y=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = 1$

DA FARE: $f(x,y)-\ell \to$ PASSARE IN C.P. $\to$ PRENDERE IL MODULO $\to$ MAGGIORARE.

$$\left|\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}-1\right| = \left|\frac{(x-1)^2+y^2-(x+1)^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}\right| = \left|\frac{\cancel{x^2}-2x+\cancel{1}-2x-\cancel{x^2}-\cancel{1}}{(x+1)+y^2}\right| =$$

$|\cos\theta| \leq 1$

$$= \frac{4|x|}{(x+1)^2+y^2} \overset{C.P.}{=} \frac{4r|\cos\theta|}{(r\cos\theta+1)^2+r^2\sin^2\theta} = \frac{4r|\cos\theta|}{r^2+2r\cos\theta+1} \leq \frac{4r}{r^2+2r\cos\theta+1}$$

$\to$ qui deve minorare, non maggiorare

$\boxed{\cos\theta \geq -1} \Rightarrow r^2+2r\cos\theta+1 \geq r^2-2r+1$

$$\leq \frac{4r}{r^2-2r+1} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} x^4+y^4-2(x-y)$ $\qquad y=0 \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4-2x=+\infty$

DIMOSTRIAMO CHE IL $\lim \to +\infty$: DOBBIAMO MINORARE $f(x,y)$

$$x^4+y^4-2(x-y) = r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta - 2r(\cos\theta-\sin\theta) =$$

$$= r^4(\cos^4\theta + r^4\sin\theta) - 2r(\cos\theta-\sin\theta) \geq r^4(\cos^4\theta+r^4\sin\theta)-4r$$

$[>0 \ \forall\theta\in[0,2\pi]]$

$|\cos\theta-\sin\theta| \leq |\cos\theta|+|\sin\theta| < 2$

$\Downarrow$

$-2 \leq \cos\theta-\sin\theta \leq 2$

$\Downarrow \ x(-2r)$

$-4r \leq -2r(\cos\theta-\sin\theta) \leq 4r$

$$x^4+y^4-2(x-y) \geq r^4\underbrace{(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}-4r$$

per il teorema di Weierstrass ha un minimo.

$$m := \min_{\theta\in[0,2\pi]} \left\{\cos^4\theta+\sin^4\theta\right\} > 0$$

$\hookrightarrow$ SPIEGARE COSA HA FATTO QUI.

MINORIAMO e NON DIPENDE PIÙ DA θ.

$$\Rightarrow \rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 4\rho \geq m\rho^4 - 4\rho \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} +\infty \qquad \exists \text{ il lim.}$$

(e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^4} \quad C.P. \Rightarrow \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^4\cos^4\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \frac{\rho\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0 \quad \forall\theta$$

$$y = mx^2 \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot mx^2}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} \qquad \nexists \text{ lim.}$$

X CASA

① $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^6}$ ② $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x\,y)}{x^2y^2}$

③ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^3y^2)}{x^6+y^2}$ ④ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+e^{x^{-3}y^2}}{x^6+y^4}$

⑤ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}$ ⑥ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2\log x}{(x-1)^2+y^2}$

α e $\beta \geq 0$

⑦ $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to\infty} x^4+y^2+z^2-x+3y-z$

Def: funzione continua di più variabili

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (m \geq 1) \quad , \quad x_0 \in D$

(?) è vero?

f si dice continua in x_0 se x_0 è ~~un punto isolato~~ non è punto di applicazione un punto isolato di D, oppure, se $x_0 \in D$, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Somme, prodotti, quozienti e composizioni di funzioni continue sono continue (nel loro insieme di def.)

Esempio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \overbrace{(x^2+y^2-1)}^{\text{continua}}\overbrace{(x+y^2-2)}^{\text{continua}} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

MI CHIEDO QUAL'È L'INSIEME DI CONTINUITÀ DI f?

Per i teoremi generali f è continua nell'insieme $\overset{?}{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}}$

$(x_0, 0)$

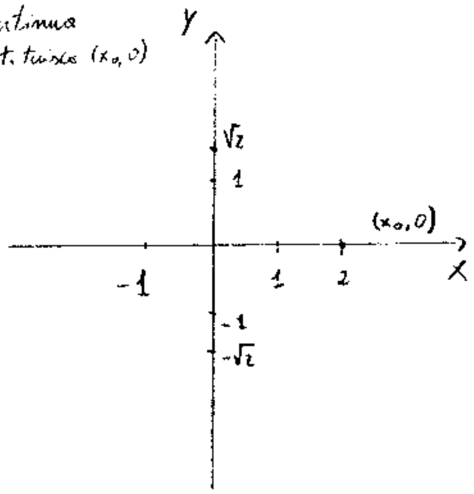
dato che è una f continua sostituisco $(x_0, 0)$

- $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y) \to (x_0, 0) \\ \boxed{xy \neq 0}}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} (x^2+y^2-1)(x+y^2-2) =$

non abbiamo già detto che lì è continua?

$f = 0$ in quel punto? perché

$= (x_0^2 - 1)(x_0 - 2) = f(x_0, 0) \overset{\downarrow}{=} 0 \quad \Rightarrow x_0 = \pm 1, \; x_0 = 2$



$(x_0, 0)$

- $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y) \to (x_0, 0) \\ \boxed{xy = 0}}} f(x,y) = 0 = f(x_0, 0)$

$(0, y_0)$

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = (y_0^2-1)(y_0^2-2) = 0 = f(0,y_0) \quad \Rightarrow \quad y_0 = \pm 1 \ , \pm\sqrt{2}$$

$\boxed{xy \neq 0}$

f è continua nell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\} \cup \{(1,0), (-1,0), (2,0),$
$(0,1), (0,-1), (0,\sqrt{2}), (0,-\sqrt{2})\}$

<u>PROPOSIZIONE</u>: $\cdot\ f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua in D, $\cdot\ I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto.

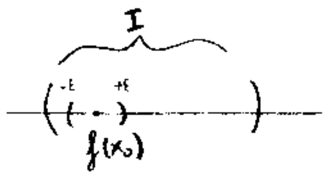
$\Downarrow$ l'insieme dei punti nel dominio che la funzione manda all'intervallo I.

$$f^{-1}(I) := \{x \in D \mid f(x) \in I\}$$

$\updownarrow$

(inverso immagine)
(controimmagine di I tramite f)

<u>DIM</u>: Sia $x_0 \in f^{-1}(I) \overset{\text{per definizione}}{\Longleftrightarrow} f(x_0) \in I \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ t.c. $(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon) \subset I$



Siccome f è continua per ipotesi, $\Downarrow$ DEF. lim. — I aperto

$$\exists\ \delta > 0 \mid x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

se x appartiene alla sfera di centro x_0 e raggio δ $\Rightarrow$

$\Downarrow$

Dato δ, tutti i punti di questa sfera appartengono a f^{-1}.

$$x \in f^{-1}(I) \Longleftrightarrow f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon) \subset I$$

$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(I)$

$\Downarrow$

$f^{-1}(I)$ è aperto <u>Perché aperto?</u>

ESEMPIO:

Voglio sapere se è un insieme aperto oppure chiuso.

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{e^{x^2 y} + 3x^4 - 5y^3 > 0} \}$$

1) Definisco $f(x,y)$ $\rightarrow$ $f(x,y)$ continua in $\mathbb{R}^2$

$\Downarrow$

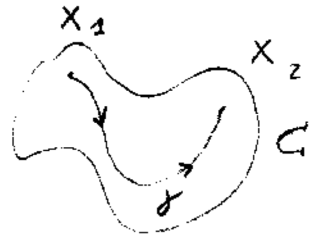
$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in \overset{I}{(0,+\infty)} \} = f^{-1}\big(\underbrace{\overset{I}{(0,+\infty)}}_{\text{intervallo aperto}}\big) \Rightarrow A \text{ è aperto}$$

$$f(x,y) \in I = f^{-1}(I)$$

$$C = \{ (x,y) \mid f(x,y) \geq 0 \} = f^{-1}\big([0,+\infty)\big) = f^{-1}\big((-\infty,0)\big)^c \Rightarrow C \text{ è chiuso.}$$

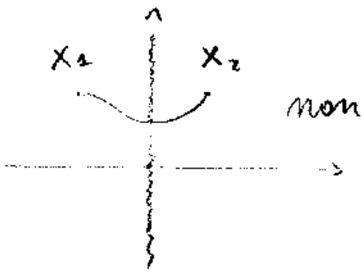
$\boxed{\text{Def.}}$ $\boxed{C \in \mathbb{R}^n \text{ è detto connesso}}$ se $\forall x_1, x_2 \in C \ \exists \ \gamma: [a,b] \to C$

curva t.c. $\gamma(a) = x_1$ e $\gamma(b) = x_2$



Dati 2 punti nell'insieme, esiste una curva che li connette tutta contenuta nell'insieme.

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \mid x = 0 \}$$



non è connesso.

$\boxed{\text{T.}}$ $\boxed{\text{ESISTENZA DEGLI ZERI}}$

$(x_1 \neq x_2)$

$f: C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, C connesso, t.c. $\exists \ x_1, x_2 \in C$ t.c. $f(x_1) > 0$

e $f(x_2) < 0 \Rightarrow \exists \ x_0 \in C$ t.c. $f(x_0) = 0$

Dim.:

C connesso $\Rightarrow \exists\ \gamma : [a,b] \to C$ $\overset{\gamma\text{ è una}}{\text{curva}}$ t.c. $\gamma(a) = x_1$ $\gamma(b) = x_2$

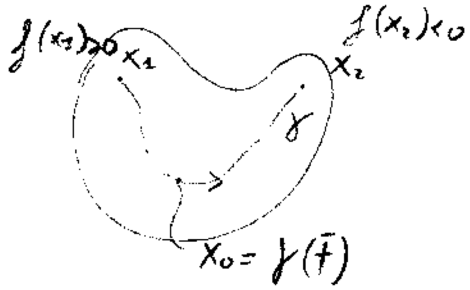
Definizione $\varphi(t) := f(\gamma(t))$ $t \in [a,b] \Rightarrow \varphi, [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ed è continua poiché lo sono f e γ.

$\varphi(a) = f(\gamma(a)) = f(x_1) > 0$ $\qquad \varphi(b) = f(\gamma(b)) = f(x_2) < 0$

$\Downarrow$ $\to$ esistenza degli zeri in 1 variabile

$\exists\ \bar{t} \in (a,b)$ t.c. $\varphi(\bar{t}) = 0$ $\qquad x_0 := \gamma(\bar{t}) \in C$ e $f(x_0) = f(\gamma(\bar{t})) = \varphi(\bar{t}) = 0$



T. | VALORI INTERMEDI

$f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, C connesso $\Rightarrow \forall k \in (\inf_C f, \sup_C f)\ \exists\ x \in C \mid f(x) = k$

$f(C) = (\inf_C f, \sup_C f)$

Def.

$K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se è chiuso e limitato

T. | BOLZANO WEIERSTRASS

$K \subset \mathbb{R}^n$ compatto $\Rightarrow$ ogni successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ ammette una sottosuccessione convergente a un punto $x_0 \in K$.

T. WEIERSTASS.

Hp: $f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua K compatto. $\Rightarrow$ Th: (i) $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ è compatto. La sua immagine

Si parla di funzioni scalari, $\leftarrow$ (ii) se $m=1$ (f scalare) $\Rightarrow \exists \max_K f, \min_K f$

non ha senso parlare di f vettoriali con max e min?

T.

Hp: $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua e invertibile (biunivoca)

$\Downarrow$

Th: $f^{-1}: f(K) \subset \mathbb{R}^m \to K \subset \mathbb{R}^n$ è continua

Def. CONTINUITÀ UNIFORME

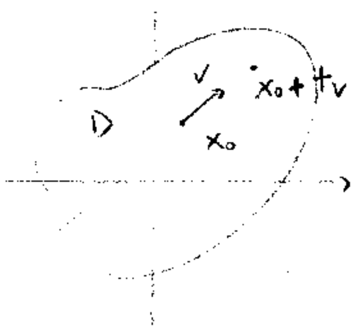
$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è uniformemente continua in D se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in D$

$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

T. HEINE - CANTOR

$K \subset \mathbb{R}^n$ compatto $f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua $\Rightarrow f$ è uniformemente continua in K.

Def. DERIVATA DIREZIONALE E PARZIALE



$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ D aperto $x_0 \in D$, $v \in \mathbb{R}^n$ $\|v\| = 1$

La derivata direzionale di $f(x_0)$ nella direzione di v è:

$$D_v f(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \frac{d}{dt} f(x_0 + tv)\Big|_{t=0}$$

Se $v = e_K$, $K = 1 \dots n$ (vettore della base canonica)

$D_{e_K} f$ è detta la derivata parziale di f rispetto a x_K e si indica:

$$\frac{\partial f}{\partial x_K}(x_0) \quad , \quad f_{x_K}(x_0) \quad , \quad \partial_K f(x_0)$$

$$f_{x_K}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\overset{(0,\dots 1 \dots 0)}{e_K}) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_{0,1}, x_{0,2} \dots x_{0,K}+t \dots x_{0,n}) - f(x_{0,1} \dots x_n)}{t}$$

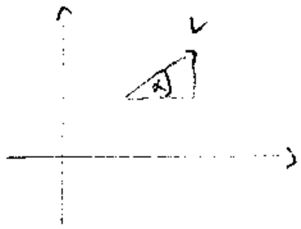
$\Rightarrow$ la derivata parziale rispetto a x_K si calcola usando le solite regole di derivazione pensando le variabili diverse da x_K come costanti.

Esempi:

(a) $f(x,y) = x^2 - 3x + 4xy + 5$ $\qquad f_x(x,y) = 2x - 3 + 4y$

$f_y = 4x$

$v = (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad \alpha \in [0, 2\pi]$



$$D_v f(x,y) = \frac{d}{dt} f(x + t\cos\alpha, y + t\sin\alpha)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(x+t\cos\alpha)^2 - 3(x+t\cos\alpha) + 4(x+t\cos\alpha)(y+t\sin\alpha) + 5\right]\Big|_{t=0} =$$

$$= \left[2(x+t\cos\alpha)\cos\alpha - 3\cos\alpha + 4\cos\alpha(y+t\sin\alpha) + 4(x+t\cos\alpha)\sin\alpha\right]\Big|_{t=0} =$$

$$= 2x\cos\alpha - 3\cos\alpha + 4y\cos\alpha + 4x\sin\alpha = (2x+4y-3)\cos\alpha + 4x\sin\alpha.$$

4|3a) Se $\alpha = 0 \Rightarrow V = (1,0) = e_1$ $\qquad D_{(1,0)} f(x,y) = f_x(x,y)$ (15)

Se $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V = (0,1) = e_2$ $\qquad D_{(0,1)} f(x,y) = f_y(x,y)$

(b) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \sin(x-3y)$ $\qquad D = \mathbb{R}^2$

Per teoremi generali sulla derivabilità f è certamente derivabile nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(x,y) \neq (0,0)$

$f_x(x,y) = \dots$ e $f_y(x,y) = \dots$

$(x,y) = (0,0)$ $\qquad f_x(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} =$

$\overset{(b)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^{|t|} \sin t - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{|t|} \sin t}{t} = 1$

Esercizi:

Studiare la continuità di: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(y - \sin x)}{e^{y-\sin x} - 1} & y > \sin x \\ a & y \leq \sin x \end{cases}$

$f(x,y) \begin{cases} \frac{x \log(1+y)}{(x^2 + \operatorname{arctg}^2 y)^a} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

16

(11) $f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy) & y < x^2 \\ 0 & y \geq x^2 \end{cases}$ $\qquad$ $\underline{f \text{ continua in } y \neq x^2}$

in (x_0, x_0^2)

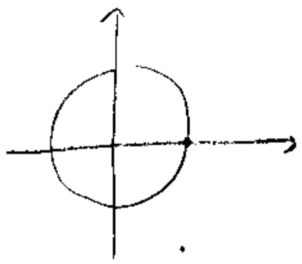
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^2)} \sin(xy) = \underline{\sin(x_0^3)} = f(x_0, x_0^2) \iff x_0 = \sqrt[3]{(\pi + k\pi)}$$

$x < y^2$ $\qquad$ $A \cup \{(\sqrt[3]{k\pi}, \sqrt[3]{(k\pi)^2})\}$

(12)

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2-y^2} & x^2+y^2 \leq 1 \\ \frac{1}{e}\sin\left(\frac{\pi}{2}(x^2+y^2)\right) & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

$x^2+y^2 \neq 1$



in $(x_0, 0)$

$$\cancel{\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ x^2+y^2\leq 1}} f(x,y) = e^{-x_0^2}}$$

$x^2 = 1 - y^2$

in $((1-y^2)^{\frac{1}{2}}, y)$

$$\cancel{\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ x^2+y^2>1}} \frac{1}{e}\sin\left(\frac{\pi}{2}(x_0^2)\right)}$$

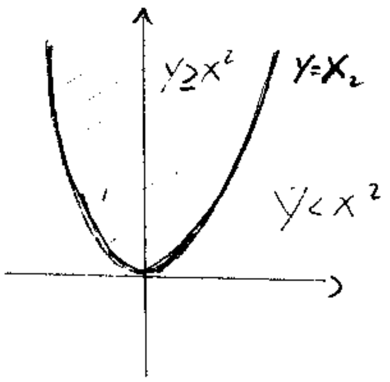
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\sqrt{1-y^2},\, y) \\ x^2+y^2\leq 1}} e^{-(1-y^2)-y^2} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{\substack{(\ ,\ ) \\ x^2+y^2>1}} \frac{1}{e}\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-y^2+y^2)\right) = \frac{1}{e}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{e}$$

Definita in $\mathbb{R}^2$

(9)

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y & y < x^2 \\ y^2 + x & y \geq x^2 \end{cases}$$



in $(0,0)$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y = x^2 - x^3}} x^2 - y = x^2 - x^2 + x^3 = x^3 = 0$$

f continua in $y \neq x^2 := A$

in (x_0, x_0^2)

$$\lim_{y<x^2} x^2 - y = 0$$

$$\lim_{y \geq x^2} y^2 + x = x_0^4 + x_0 \iff x_0 = 0 \lor x_0 = -1 \qquad A \cup \{0,0\}, \{(-1,1)\}$$

---

(10) $$f(x,y) = \begin{cases} x + y^3 & x \leq y^3 \\ x^2 + y^6 & x > y^3 \end{cases}$$

f continua in $x \neq y^3$ ↗ PRECISAMENTE, PERCHÉ?

in (y^3, y)

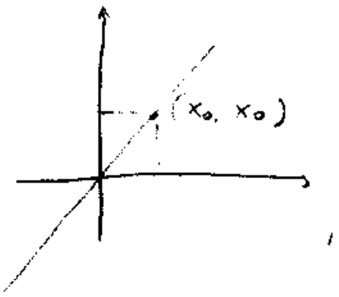
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(y_0^3, y_0) \\ x \leq y^3}} x + y^3 = y_0^3 + y_0^3 = 2y_0^3$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(y_0^3, y_0) \\ x > y^3}} y_0^6 + y_0^6 = 2y_0^6 = 2y_0^3 \iff y_0 = 1, 0$$

$A \cup \{(0,0), (1,1)\}$

(18)

(7)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x-y} & x-y\neq 0\\[2mm] 0 & x-y=0\end{cases}$$



in (x_0, x_0) $\quad x_0\neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \nexists$$

in $(0,0)$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{x} = x \to 0 \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{y^2}{-y} = -y = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \text{C.P.} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\cancel{\rho}(\cos-\sin)} = \frac{\rho}{\cos\theta-\sin\theta} = \nexists$$

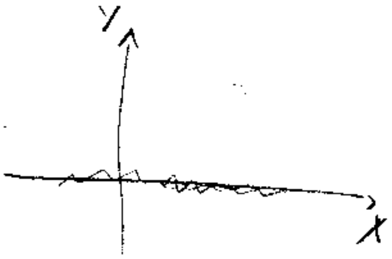
se $\theta=0$ $\quad 1-0 \Rightarrow \rho\to 0^+$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ $\quad 0-1 \Rightarrow \rho\to 0^-$

[$\to$ non era sbagliato così?]

Lui usa $y=x-x^3 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+(x-x^3)^2}{x^3} = \dfrac{2\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}} = \nexists$

(8)
$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{1+y+x^2}{y}\right)^y & y\neq 0\\[2mm] 1 & y=0\end{cases}$$



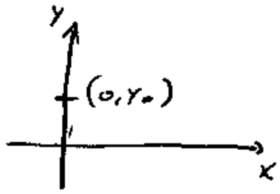
in $(x_0, 0)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \left(\frac{1+y+x^2}{y}\right)^y = e^{y\log\frac{1+y+x^2}{y}} = 1 + o(1) = 1 = f(x_0,0)$$ CONTINUA IN QUESTO PUNTO

PERCHÉ?
$$A := \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1+y+x^2}{y} > 0 \right\} \quad ???$$

$\boxed{2}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y^3}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$

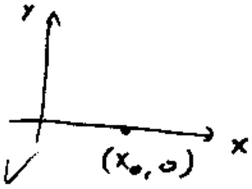


in $(0, y_0)$

$\boxed{xy \neq 0}$ $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{y^3}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right) \leq \underset{x\to 0}{x^2 \cdot (1)\cdot(1) = 0}$ ✓

in $(x_0, 0)$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{y^3}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{y}\right) \leq \underset{y\to 0}{x^2 \cdot \frac{y^3}{\cancel{x}}\cdot o\left(\frac{y^{3+2}}{x^2}\right)\cdot 1 = 0}$ ✓

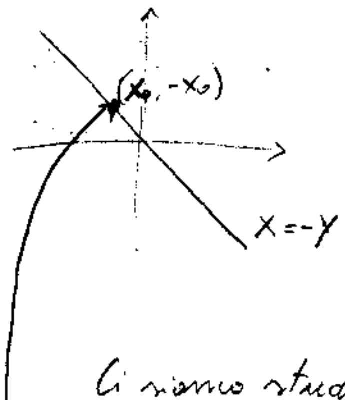


$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ → non serve PERCHÉ?

f CONTINUA IN $\mathbb{R}^2$, ABBIAMO COMPRESO ANCHE I PUNTI T.C. $xy = 0$ GIUSTO?

---

(6) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^3 + y^3} & x + y \neq 0 \Rightarrow x \neq -y \\ 0 & x + y = 0 \Rightarrow x = -y \end{cases}$



in $(0,0)$

~~$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3} = \frac{\rho^{\cancel{6}\,3}(\sin^3\theta \cdot \cos^3\theta)}{\cancel{\rho^3}(\sin^3\theta + \cos^3\theta)} \leq \rho^3 \to 0$~~

~~$\lim_{x\to -y} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3}$~~

Ci siamo studiati come si comporta f in $(x_0, -x_0)$ e abbiamo visto che il lim $\nexists$. Poi abbiamo visto nel particolare come si comportava nell'origine; Dato che il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ha valori diversi a seconda della curva che prendo, il lim $\nexists$.

in $(x_0, -x_0)$, $x_0 \neq 0$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3} = \nexists$

in $(0,0)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dots = \nexists$ perché $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3} = 0$ $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x+x^4}} \dots = -\frac{1}{3}$

ESERCIZIO GUIDA: ... CONTINUITÀ

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2|xy|(x^3-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

. Iniziamo lo studio della continuità nell'origine $(x_0,y_0)=(0,0)$

RICORDIAMO CHE $f(x,y)$ È CONTINUA IN UN PUNTO (x_0,y_0) SE E SOLO SE:

1) IL PUNTO CONSIDERATO (x_0,y_0) FA PARTE DEL DOMINIO DI $f(x,y)$.

2) IL LIMITE DEVE ESISTERE $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

3) IL LIMITE $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

. Nel punto $(0,0)$ f è <u>definita</u> e vale $f(0,0)=0$? ?

. Dobbiamo dimostrare che il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ $\to$ C.P. $\to$ MAGGIORO $\to$

$\to \lim_{\rho\to 0} \rho^6+\rho=0=f(0,0)$ $\Rightarrow$ f è continua nell'origine.

FINE.

ESERCIZI: *Calcolo differenziale per funzioni di più variabili (1)*

$\boxed{1}$ Continuità:

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Continua per teoremi generali sulle funzioni continue.

In $(x_0, 0)$ si ha $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{y} = \frac{xy(1+o(1))}{y} = x_0 = f(x_0,0)$

$= f(x_0,0) \Leftrightarrow \underline{x_0 = 0}$ $\Rightarrow$ Quindi f è continua in $A \cup \{(0,0)\}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ continua in $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

f continua in $A \cup \{(0,0)\}$

$\Uparrow$

in $(0, y_0)$ si ha $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \frac{xy(1+o(1))}{y} = y_0 = f(0,x_0) \Leftrightarrow y_0 = 0$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \sin\left(\dfrac{|y|}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ continua in $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

in $(0, y_0)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \operatorname{arctg}\Big(x \cdot \overbrace{\sin\left(\tfrac{|y|}{x}\right)}^{\text{limitata}}\Big) = x \cdot \sin\frac{|y|}{x} = 0 = f(0,y_0)$ $\Rightarrow$ continua in tutto $\mathbb{R}^2$

(4) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{1+y}\; e^{\left(\frac{x^2}{y^2(x^2+y^2)}\right)} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

$x = y$ $\quad (1+y)^{\frac{1}{3}}$

$y = 0$ $\quad x = 0$ $\quad y = 0$ $\quad \dfrac{\cancel{x^2}}{\frac{y^2}{\cancel{x^2}}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}$ $\quad \dfrac{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{-1}}{y^2}$

$\boxed{y \neq 0}$

in $(x_0, 0)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \sqrt[3]{1+y}\; e^{\left(\frac{x^2}{y^2(x^2+y^2)}\right)} = \left(1 + \tfrac{1}{3}y + o(y)\right) e^{\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)/y^2} = +\infty$

$\boxed{y \neq 0}$

in $(0,0)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1 + \frac{y}{3}\right) \cdot$

$\boxed{y = mx}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \log(1+mx)}{(x^2+\operatorname{arctg}^2 mx)^a} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot mx}{\Big[x^2+m^2x^2 \underbrace{\frac{\operatorname{arctg}^2 mx}{m^2x^2}}_{\to 1}\Big]^a} \cdot \overbrace{\frac{\log(1+mx)}{mx}}^{\to 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{[x^2+mx^2]^a} = \frac{m\, x^{[2-2a]}}{[1+m^2]^a} = \begin{cases} \pm\infty & 2-2a<0 \Rightarrow a>1 \quad X \\ \frac{m}{1+m^2} & 2-2a=0 \Rightarrow a=1 \quad X \\ 0 & a<1 \quad O \end{cases}$$

Per $a \geq 1$ f non è continua in $(0,0)$

$\boxed{a<1}$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \overbrace{\log(1+y)}^{1}}{(x^2+\operatorname{arctg}^2 y)^a} \cdot \frac{y}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+\operatorname{arctg}^2 y)^a} = \text{COORDINATE POLARI} =$$

MAGGIORO

$$= \left| \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{(\rho^2\cos^2\theta + \operatorname{arctg}(\rho\sin\theta))^a} \right| \leq \left| \frac{\rho^2}{(\dots)^a} \right| \leq \left| \frac{\rho^2}{(\rho^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}\rho^2\sin^2\theta)^a} \right| =$$

$$\frac{\operatorname{arctg}(t)}{t} \underset{t\to 0}{\to} 1 = \exists\, \delta>0 \mid |t|<\delta \quad \frac{\operatorname{arctg}(t)}{t} > \frac{1}{2}$$

$$\rho<\delta \Rightarrow \rho\sin\theta < \delta \Rightarrow \operatorname{arctg}(\rho\sin\theta) > \frac{1}{2}\rho\sin\theta$$

$$= \left| \frac{\rho^{2-2a}}{(\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta)^a} \right| \leq \left| \frac{\rho^{\overbrace{2-2a}^{a<1 \Rightarrow 2-2a>0}}}{m^a} \right| \underset{\rho\to 0}{\to} 0 \quad \blacksquare$$

Quindi f è continua per $a<1$

se $m = \min \cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta > 0$

$\theta \in [0, 2\pi]$

③ $f(x,y) = |xy| \qquad D = \mathbb{R}^2$

. Continuità

. Derivabilità

•) Continuità: continua in tutto $\mathbb{R}^2$

. Differenziabilità

•) Derivabilità: ESISTONO TUTTE LE DERIVATE PARZIALI?

f derivabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid xy=0\}$ Perché? Il modulo esclude tutti i punti in cui $xy=0$ perché ha un punto di cuspide.

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{x}{|x|}\,|y| \\ f_y(x,y) &= |x| \cdot \frac{y}{|y|} \end{aligned}\right\} xy \neq 0$$

$\boxed{\text{in } (x_0, 0)}$

$$f_x(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{\to 0}{f(x_0+h,0)} - \overset{\to 0}{f(x_0,0)}}{h} = 0$$

$\exists$ la derivata parziale f_x. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$f_y(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h) - \overset{\to 0}{f(x_0,0)}}{h} = \frac{|x_0 \cdot h|}{h} =$$

$$= |x_0| \cdot \frac{|h|}{h} = \nexists \text{ perché } \frac{|h|}{h} = \pm 1$$

$\exists$ PER $x_0 = 0$

$\exists$ f_y ma solo nell'origine.

$\boxed{\text{in } (0, y_0)}$

$$f_x(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y_0) - \overset{\to 0}{f(0,y_0)}}{h} = \frac{|h\,y_0|}{h} = \nexists \text{ tranne che per } \underline{y_0 = 0}$$

$$f_y(0,x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{\to 0}{f(0,y_0+h)} - \overset{\to 0}{f(0,y_0)}}{h} = 0 \quad = \exists\ f_y \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

·) Differenziabilità

f è sicuramente differenziabile fuori dagli assi, in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid xy=0\}$

f sugli assi non è differenziabile (esclusa l'origine): $\{(x,0) \mid x\neq 0\} \cup \{(0,y) \mid y \neq 0\}$

↳ Perché le derivate parziali non sono continue sugli assi.

Non posso usare il Teorema del differenziale totale perché le derivate parziali non sono definite in un intorno $(0,0)$, e questo nega le Hp del Teorema.

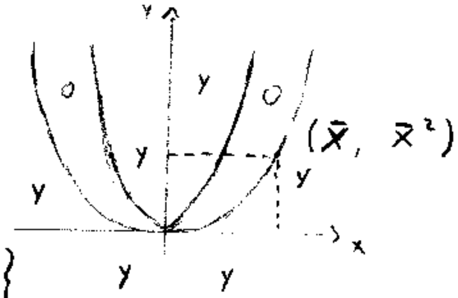
Dobbiamo usare la definizione di Differenziabilità:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,0)}^{0} - \overbrace{f_x(0,0)}^{0}\cdot x - \overbrace{f_y(0,0)}^{0}\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\text{c.p.}}{=} \frac{\rho^2 \text{ in caso}}{\rho} \leq \rho \to 0 \quad \blacksquare$$

f è differenziabile nell'origine.

---

④ $f(x,y) = \begin{cases} 0 & x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ y & \text{altrimenti} \end{cases}$



·) Continuità: f continua in $\{(x,y) \mid y \neq x^2 \text{ e } 2x^2\}$

$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{x}^2)} f(x,y) =$ fa zero? → impongo il lim da sopra e da sotto uguale a zero

<u>da sotto</u>: $\boxed{y<x^2}$ $\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{x}^2)} y = \bar{x}^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ f è continua solo nell'origine

<u>da sopra</u>: $\boxed{y>2x^2}$ $\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{x}^2)} y = 2\bar{x}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x_0 = 0$

f è continua in $\boxed{\{y \neq x^2 \text{ e } y \neq 2x^2\} \cup \{(0,0)\}}$ 7

$$\left|z^2+z+\rho^4\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta+4\rho\right|\geq\left|z^2+z-\rho^4-\rho^2+4\rho\right|=\left|z^2(1+o(1))-\rho^4(1+o(1))\right|=\infty$$ 25

$\sin^2\theta > -1$

$\cos^4\theta > -1$

$$(x,y,z)\to\infty \iff \sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$$

$|z|, |y|, |x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad -|x| \geq -\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

SOLO IL MODULO $\leftarrow 3y \geq -3\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

È $\leq \sqrt{\ }$ MENTRE $\qquad -z \geq -\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$-\sqrt{\ } \leq y \leq \sqrt{x^2}$

$$x^4+y^2+z^2-\cancel{x}+3y-z \geq x^4+y^2+z^2-5\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$x^4+y^2+z^2 \geq x^2+y^2+z^2$ se $|x|\geq 1$

$x^4+y^2+z^2 \geq y^2+z^2 \geq y^2+z^2+x^2-1$ se $|x|<1$

$\Downarrow$

$x^2-1<0$

$x^2+y^2+z^2-1 \leq x^2+y^2+z^2$

$$\geq x^2+y^2+z^2-5\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{r=}-1 = r^2-5r-1 \to$$

per $r\to\infty$

ESERCIZI PER CASA (26) x2

$y=0$

(5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{0}{x^2} = 0 \qquad \alpha, \beta \geq 0$

MAGGIORO

$\left|\dfrac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2+y^2}\right| \overset{C.P.}{=} \left|\dfrac{|r\cos\theta|^\alpha |r\sin\theta|^\beta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\right| = \left|\dfrac{|r\cos\theta|^\alpha |r\sin\theta|^\beta}{r^2}\right| = \left|\dfrac{r^\alpha \cdot r^\beta \cdot \sin^\beta\theta \cdot \cos^\alpha\theta}{r^2}\right| \leq \left|\dfrac{r^\alpha r^\beta}{r^2}\right| =$

$(\sin\theta)^\beta \leq 1^\beta = 1 \quad (\cos\theta)^\alpha \leq 1$

$\to 0$ se $\theta = 0, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$

$= \left|r^{\alpha+\beta-2}\right|$ Per $r\to 0$

$\longrightarrow 0$ se $\alpha+\beta-2 > 0 \to \exists$ in questo caso.

$\longrightarrow \infty$ se $\alpha+\beta-2 < 0$

$\longrightarrow = 1$ se $\alpha+\beta = 2$ ■

$x = r\cos\theta + 1$

(6) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2} = \dfrac{r^2\sin^2\theta \log(1+r\cos\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \sin^2\theta \log(1+r\cos\theta)$

$= \sin^2\theta \cdot (r\cos\theta) = 0$

MAGGIORO

$\left|\dfrac{y^2\log x}{(x-1)^2+y^2}\right| = \left|\sin^2\theta \cos\theta\, r\right| \leq |r| \underset{r\to 0}{=} 0$ ■

---

(7) $\lim_{(x,y,z)\to\infty} x^4 + y^2 + z^2 - x + 3y - z = x(x^3-1) + y(y+3) + z(z-1)$

$|x^4+y^2+z^2-3y-x-z| \leq$

$\left|x^4+y^2+\cancel{z^2-3y-x-z}\right| \geq \left|x^4+y^2+z^2 \cancel{- (|3y+x+z|)}\right|$

$\sin\theta \geq -1 \quad \cos\theta \geq 1$

C.C.

$\left|\rho^4\cos^4\theta + \rho^2\sin^2\theta + z^2 - 3\rho\sin\theta - \rho\cos\theta - z\right| \geq \left|\rho^4\cos^4\theta + \rho^2\sin^2\theta + z^2 + 3\rho + \rho - z\right| =$

$$= \left| -\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{24} \right| \le \left| \frac{r^4}{24} \right| \xrightarrow{r\to 0} 0 \quad ■$$

$\cancel{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta \ge r^4}$ $(-1)\, r^4\cos^2\theta\sin^2\theta \le -1\cdot r^4\cdot(-1) \Rightarrow -r^4\cos^2\sin^2\theta \le r^4$

$$(3)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^3y^2)}{x^6+y^2} \overset{x^3=y}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y^3)}{2y^2} = \frac{y^3}{2y^2} = \frac{y}{2} = 0$$

$$\lim \overbrace{\frac{\log(1+x^3y^2)}{x^3y^2}}^{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^3y^2}{x^6+y^2}}_{\text{maggioriamo}} = 0$$

$$\left|\frac{\log(1+x^3y^2)}{x^6+y^2}\right| \overset{C.P.}{=} \left|\frac{\log(1+r^5\cos^3\theta\sin^2\theta)}{r^6\cos^6\theta+r^2\sin^2\theta}\right| = \left|\frac{r^{5}\cos^3\theta\sin^2\theta}{r^{6}\cos^6\theta+r^2\sin\theta}\right| = \left|\frac{r^3\cos^3\theta\sin^2\theta}{r^4\cos^6\theta+\sin\theta}\right|$$

PROVO CON $y^2=-x^6+x^7$

$$0 \le \left|\frac{x^3y^2}{x^6+y^2}\right| = \frac{|x|^3y^2}{x^6+y^2} \le \frac{|x|^3(\cancel{y^2+x^6})}{\cancel{y^2+x^6}} = |x|^3 \to 0$$

$$\left|\frac{\log\left[1+x^3(-x^6+x^7)\right]}{x^7}\right| = \left|\frac{\log\left[1-x^9+x^{10}\right]}{x^7}\right| = \left|\frac{-x^9+x^{10}}{x^7}\right| = \left|-x^2+x^3\right| =$$

MAGGIORO

$$= |x^3-x^2| \le |x^3|+|x^2| = 0 \quad ■$$

$$(4)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+e^{x^{-3}y^{-2}}}{x^6+y^4} = \frac{1+e^{x^{-3}x^3}}{x^6+x^6} = \frac{1+e^{x^0}}{2x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{1+e}{2x^6} = +\infty$$

$x^{-3}y^{-2}$ → deve tendere a zero $\quad y^2 = x^3 m$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+e^{x^{-3}y^2}}{x^6+y^4} \qquad x^{-3}=y^2 \Rightarrow x^{(-3)(-2)}=y^{(2)(-2)} \Rightarrow x^6=y^{-4} \Rightarrow x^{-6}=y^4$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1+e^{y^4}}{y^4+y^{-4}} =$$

$$= \frac{1+e^{y^4}}{y^4+\frac{1}{y^4}} = \frac{1+e^{y^4}}{\frac{y^8+1}{y^4}} = \frac{y^4+y^4e^{y^4}}{y^8+1} = \frac{y^4+y^4(1+y^4)}{y^8+1} = \frac{y^4+y^4+y^8}{y^8+1} = 0$$

$$\left|\frac{1+e^{x^{-3}y^2}}{x^6+y^4}\right| \overset{C.P.}{=} \left|\frac{1+e^{\frac{r^2\sin^2\theta}{r^3\cos^3\theta}}}{r^6\cos^6\theta+r^4\sin^4\theta}\right| = \left|\frac{1+e^{\frac{\sin^2\theta}{r\cos^3\theta}}}{r^4(r^2\cos^6\theta+\sin^4\theta)}\right|$$

DIPENDA DA θ

NON $\nexists$

ESISTENZA DEL LIMITE.

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^6}$

Per $y=0$ $\Rightarrow \frac{0}{x^2} = 0$ se $\exists \lim f(x,y) \Rightarrow$ è $=0$

Per $y=mx$ C.P.

$\Rightarrow \frac{\cancel{x^2}\, m^2 x^2}{\cancel{x^2}+m^6 x^{\cancel{6}\,4}} = \frac{m^2x^2}{1+m^6x^4} = \frac{m^2\rho^2\cos^2\theta}{1+m^6\rho^4\cos^4\theta}$

MAGGIORARE

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^6}\right| \overset{C.P.}{=} \left|\frac{\rho^{\cancel{4}\,2}\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta+\rho^{\cancel{6}\,4}\sin^6\theta}\right| = \left|\frac{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\rho^4\sin^6\theta}\right| \le \left|\frac{\rho^2\sin^2\theta}{1+\rho^4\sin^6\theta}\right| \le \left|\frac{\rho^2}{1+\rho^4}\right| = 0 \; \blacksquare$$

PER $\rho\to 0$

$\cos^2\theta \le 1 \quad \sin^6\theta \le 1 \quad \sin^2\theta \le 1$

STAVO AUMENTANDO IL DENOMINATORE

COME FAREBBE IL PROF:

$\frac{\rho^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta+\rho^4\cos^6\theta}$ Per $\rho\to 0$ $\to 0$ NON POSSO MAGGIORARE DA QUI?

$x^2 = -y^6+y^7$ curva tangente a quella che c'era

[Potevo usare anche questa sostituzione]

$|y^2-y| \le |y^2|+|y| = 0 \; \blacksquare$

$\lim_{y\to 0} \frac{(-y^6+y^7)y^2}{\cancel{-y^6}+y^7+\cancel{y^6}} = \left|\frac{-y^8+y^9}{y^7}\right| = |-y+y^2| = 0$ NO! $\to$ non ho maggiorato $\blacksquare$

---

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$

Per $x=y$ $t=xy$

$\Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(y^2)}{y^4} = \frac{1}{y^4} - \frac{\cos(y^2)}{y^4}$

$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$

$\overset{C.P.}{\to}_{\rho\to 0} \frac{1-\cos(\rho^2\sin\theta\cos\theta)}{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta} = \frac{1-1+\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta/2}{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta} = \frac{1}{2}$ se $\exists$ è così

$$\left|\frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-2\cos(xy)-x^2y^2}{2x^2y^2}\right| \overset{C.P.}{=} \left|\frac{2-2\cos(\rho^2\cos\theta\sin\theta)-\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{2\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta}\right| =$$

$$= \left|\frac{\cancel{2}-2\left(\cancel{1}-\frac{\cancel{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}}{2}+\frac{\rho^8\cos^4\theta\sin^4\theta}{24}\right)-\cancel{\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta}}{2\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta}\right| = \left|-\frac{\rho^{\cancel{8}\,4}\cos^{\cancel{4}\,2}\theta\sin^{\cancel{4}\,2}\theta}{24\cancel{\rho^4}\cancel{\sin^2\theta\cos^2\theta}}\right| =$$

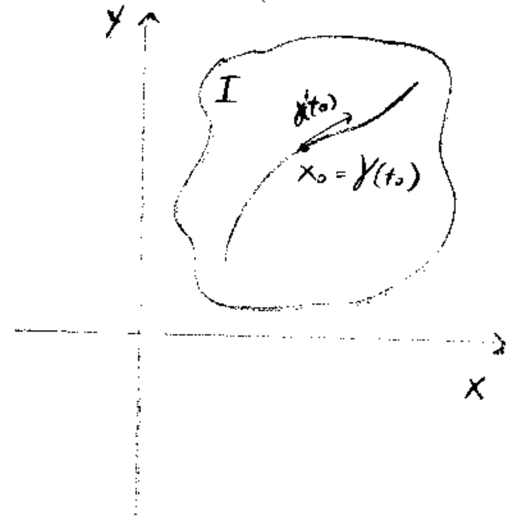
T. REGOLA DELLA CATENA (caso particolare)

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. D aperto, f differenziabile in $x_0 \in D$

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ curva t.c. $\exists\, t_0 \in I$ t.c. $\gamma(t_0) = x_0$ e $\exists\, \gamma'(t_0)$

Th:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle$$



Generalizzazione della
Regola delle derivazioni delle funzioni composte.

Dim.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0}$$

$\Rightarrow$ Hp: f diff. in $x_0 = \gamma(t_0)$ $\Rightarrow$ quindi posso scrivere $f(\gamma(t))$ come

ma chi me lo dà precisamente? $\to$ def: f è diff. in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0$

$$\Rightarrow f(\gamma(t)) = f(\gamma(t_0)) + \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle + o(\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|) =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{\langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle + o(\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \underbrace{\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}}_{\to = \gamma'(t_0) \text{ per } t \to t_0} \rangle + \frac{o(\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|)}{t - t_0}$$

è il rapporto incrementale

$\to$ rimane da dimostrare che questo rapporto fa zero.

$$\frac{o(\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|)}{t-t_0} = \frac{o(\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|)}{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|} \cdot \frac{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|}{t-t_0} =$$

$$= \underbrace{\frac{o(\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|)}{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|}}_{\downarrow \; 0 \text{ per definizione}} \; \underbrace{\frac{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|}{\|t-t_0\|}}_{\|\gamma'(t_0)\|} \; \underbrace{\frac{\|t-t_0\|}{t-t_0}}_{\downarrow \; \pm 1} \to 0 \quad \Rightarrow$$

è una quantità limitata? Per questo fa zero il prodotto totale?

$$\Rightarrow \lim_{t\to t_0} \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle \quad \blacksquare$$

<u>se $n=2$</u>

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \qquad \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

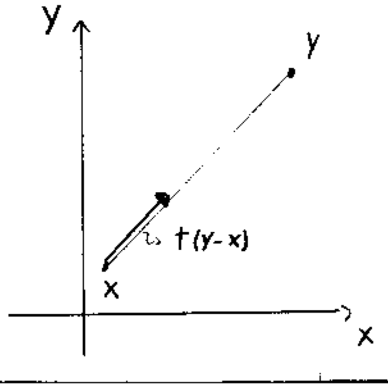
$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t))\, y'(t)$$

$\boxed{\text{Def:}}$

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ il segmento chiuso di estremi x e y è l'insieme

$$[x, y] = \{ x + \underbrace{t(y-x)}_{l} \mid t \in [0,1] \}$$

Vettore che ha direzione la retta passante per x e y e con modulo variabile.



2 $[x, y] = \{ x + t(y-x) \mid t \in [0,1] \}$ è il sostegno della curva:

$\cdot \gamma(t) = x + t(y-x) \quad , \quad t \in [0,1]$

Se il segmento è aperto:

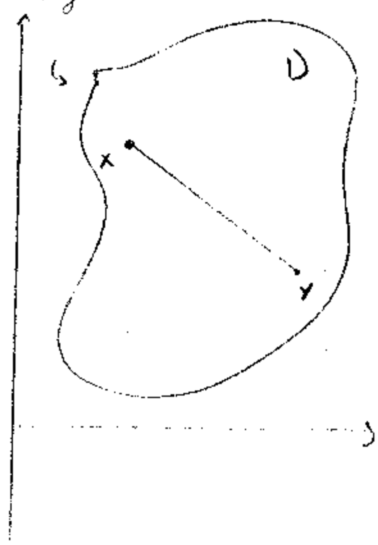
$$(x, y) = \{ x + t(y-x) \mid t \in (0,1) \}$$

con $x_0 \in (a,b)$

Lagrange: $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$

$\boxed{\text{T.} \mid \text{VALOR MEDIO}}$ Generalizzazione del teorema di Lagrange.

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad x, y \in D$ t.c. $[x, y] \subset D$ → Vuol dire che tutto il segmento è contenuto in D.



f continua su $[x, y]$ e differenziabile in (x, y)

$\Downarrow$ (come x_0)

Th: $\exists\, \xi \in (x, y)$ t.c.

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(\xi), y - x \rangle$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Definiamo $\varphi(t) := f(x + t(y-x)) \quad t \in [0,1]$

una sola variabile

• Essendo composizione di funzioni continue ⇒ è continua in $[0,1]$

• " " " " " " derivabili ⇒ è derivabile in $(0,1)$

[non è φ?] $\quad \frac{d\, f(\gamma(t))}{dt} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$

Per la regola della catena → $\gamma'(t) = \left\langle \nabla f(x + t(y-x)),\ \frac{d}{dt}\left(x + t(y-x)\right) \right\rangle =$

non è t_0?

$$= \left\langle \nabla f\left(x + t(y-x)\right),\ y - x \right\rangle \Rightarrow$$

o anche Lagrange

Teorema del valor medio in 1 variabile

Il Teorema del valor medio dice:

$\Rightarrow \quad \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)(1-0)$ per qualche $\tau\,(0,1)$

$\varphi(t=1) = f(y) \qquad \varphi(0) = f(x) \qquad \langle \nabla f(x + \underbrace{\tau(y-x)}_{\text{lo chiamo } \xi \in (x,y)}), y-x \rangle$

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(\xi), y-x \rangle$$

■

$\boxed{\text{Def:}}$ $\boxed{\text{Derivata Direzionale seconda}}$

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D aperto, $x_0 \in D$, $v, w \in \mathbb{R}^n$

$\|v\| = \|w\| = 1$ La derivata direzionale seconda di f in x_0 nelle direzioni di v e w é:

$$D^2_{w,v} f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_v f(x_0 + tw) - D_v f(x_0)}{t}$$

[Qui parliamo di scalari?] $\displaystyle = \frac{d}{dt} D_v f(x_0 + tw) \Big|_{t=0}$

$v = e_j \quad ; \quad w = e_k$

$$D^2_{e_k e_j} f(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}(x_0) = f_{x_k x_j}(x_0)$$ Derivata parziale seconda rispetto a x_j e x_k

prima derivo rispetto x_j

T. SCHWARZ Le derivate seconde non cambiano se inverto l'ordine di derivazione.

$f: D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D aperto, $x_0 \in D$,

¿ esistono le derivate f_{x_j} e f_{x_k} separatamente?

$\exists f_{x_j, x_k}$ in D e sono continue in x_0 $\Rightarrow$ $f_{x_j x_k}(x_0) = f_{x_k x_j}(x_0)$

$\forall j, k = 1, \dots n$

Def: Differenziabile 2 volte

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D aperto , $x_0 \in D$, f si dice 2 volte differenziabile in x_0 se $\exists f_{x_j}$ in un intorno di x_0 ed è differenziabile in x_0 $\forall j = 1 \dots n$

GENERALMENTE

↳ f è differenziabile K volte in x_0 se è differenziabile $k-1$ volte in un intorno di x_0 e le derivate parziali $(k-1)$ esime sono differenziabili in x_0.

- $C^K(D) = \{ f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid$ le derivate parziali k-esime di f sono continue in D. $\}$

insieme delle funzioni continue derivate al grado k.

$f \in C^k(D) \Rightarrow$ f è differenziabile K volte in D

Per il Teorema del differenziale totale $\Rightarrow$ $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

$\exists^{mo}$ $f_{x_1}(x) \dots f_{x_n}(x)$ $\forall x \in D$ e sono continue in $x_0 \Rightarrow f$ è diff. in x_0.

Def: L'Hessiano di f

f è 2 volte differenziabile in x_0, l'hessiano di f :=

$$:= D^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\underline{x_0}) & f_{x_1 x_2}(\underline{x_0}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\underline{x_0}) \\ f_{x_2 x_1}(\underline{x_0}) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & \cdot & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\underline{x_0}) & & \cdot & f_{x_n x_n}(\underline{x_0}) \end{pmatrix}$$

Chi me lo dice? $\to$ definizione generale di derivata direzionale e gradiente.

$$D_v f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

definizione di gradiente di una f a n variabili.

$$D^2_{wv} f(x_0) = D_w \left(\langle \nabla f(x), v \rangle \right) \Big|_{x=x_0} = D_w \left(\sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(x) \cdot v_j \right) \Big|_{x=x_0}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} D_w f_{x_j}(x_0) \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla f_{x_j}(x_0), w \rangle v_j = \sum_{j,k=1}^{n} f_{x_k x_j}(x_0) v_j w_k =$$

ricordando che è un vettore

$$= \langle \underline{w}, D^2 f(x_0) v \rangle = \langle \underline{v}, D^2 f(x_0) w \rangle$$

$D^2 f(x_0)$ è simmetrica.

4

T. FORMULA DI TAYLOR AL SECONDO ORDINE.

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2 volte differenziabile in $x_0 \in D$.

il prodotto scalare è commutativo

Posto che $T_2(x) := f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle x - x_0, D^2 f(x_0) \cdot (x - x_0) \rangle$

(è il polinomio di Taylor al secondo ordine)

allora le Th:

Resto di Peano

(i) $f(x) = T_2(x) + o(\|x - x_0\|)^2$ per $x \to x_0$

(ii) T_2 è l'unico polinomio di II grado in x t.c. valga (i)

(iii) Sia $x \in D$ t.c. $[x, x_0] \subset D$ e f sia una volta differenziabile in $[x, x_0]$ e 2 volte differenziabile in (x, x_0)

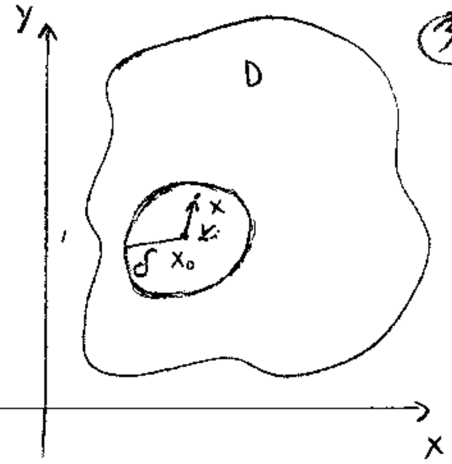
$\Downarrow$

Resto di Lagrange al II ordine.

allora: $\exists\, \xi \in (x, x_0)$ t.c. $f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle x - x_0, D^2 f(\xi)(x - x_0) \rangle$

[Cosa cambia rispetto a (i)? Leva l'$o(\| \ \|)$?]

$\boxed{\text{Dim (i)} \quad f(x) = T_2(x) + o(\|x-x_0\|^2)}$



- D aperto $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ t.c. $B_\delta(x_0) \subset D$

$x \in B_\delta(x_0)$ $\quad v_i = \dfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$ versore che individua x da x_0

definiamo: $\varphi_v(t) := f(x_0 + tv)$ con $|t| < \delta$ (incremento in una direzione qualsiasi)

φ_v è 2 volte derivabile in $t = 0$

$\Downarrow$

Posso usare Taylor al secondo ordine in una variabile.

$\Downarrow$

$$\varphi_v(t) = \varphi_v(0) + \varphi_v'(0)\cdot t + \frac{1}{2}\varphi_v''(0)\, t^2 + o(t^2)$$

$\varphi_v(0) = f(x_0)$

$\varphi_v'(0) = \dfrac{d}{dt} f(x_0 + tv)\Big|_{t=0} = \langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle \Big|_{t=0}$

$$\varphi_v''(0) = \frac{d}{dt}\langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(x_0 + tv)\cdot v_j\right)\Bigg|_{t=0} = \sum_{j,k=1}^{n} f_{x_k x_j}(x_0)\, v_j v_k = \langle v, D^2 f(x_0)\cdot v \rangle$$

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), v \rangle t + \frac{1}{2}\langle v, D^2 f(x_0)\cdot v \rangle t^2 + o(t^2)$$

$$\underbrace{t = \|x - x_0\|}_{} < \delta \Rightarrow x_0 + tv = x_0 + \underbrace{\|x - \cancel{x_0}\|}_{=\,t}\cdot \underbrace{\left(\frac{(x - x_0)}{\|x - \cancel{x_0}\|}\right)}_{=\,v} = x$$

$\Rightarrow$

5 $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \left\langle \nabla f(x_0), \underbrace{\frac{x-x_0}{\|\cancel{x-x_0}\|}}_{v} \right\rangle \cdot \underbrace{\|\cancel{x-x_0}\|}_{t} + \frac{1}{2}\left\langle \frac{x-x_0}{\|\cancel{x-x_0}\|}, D^2 f(x_0)\frac{x-x_0}{\|\cancel{x-x_0}\|}\right\rangle \|\cancel{x-x_0}\|^2 + o(\|x-x_0\|)^2$

$\hookrightarrow f(x) = T_2(x) + \underbrace{o(\|x-x_0\|^2)}_{\text{resto di Peano}}$

■

Dim. (ii)	Unicità del Polinomio

Sia P_2 un Polinomio di II grado in $x \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + tv \quad v = \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} \quad \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv) - P_2(x_0+tv)}{\|\cancel{x_0} + tv - \cancel{x_0}\|^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_v(t) - P_2(x_0+tv)}{t^2} \quad \Rightarrow \quad P_2(x_0+tv) \text{ è un polinomio di II grado in } t.$$

$$\Rightarrow P_2(x_0+tv) = \varphi_v(0) + \varphi_v'(0)t + \frac{1}{2}\varphi_v''(0)t^2 \Rightarrow \text{Per } t = \|x-x_0\| \Rightarrow P_2(x) = T_2(x)$$

$\downarrow$

Unicità del polinomio di Taylor ad 1 variabile

■

Dim. (iii)	$\exists\, \xi \in (x, x_0)$ t.c. $f(x) = \dots + \frac{1}{2}\langle x-x_0, D^2 f(\xi)(x-x_0)\rangle$

?

Dalle Hp su f, possiamo dire che $\varphi_v := f(x_0+tv)$ è derivabile in $[0, \|x-x_0\|]$ e 2 volte in $(0, \|x-x_0\|)$

$\Downarrow$

Teorema di Taylor con Resto di Lagrange

$\Downarrow$

$$\varphi_v(t) = \varphi_v(0) + \varphi_v'(0)\cdot t + \frac{1}{2}\varphi_v''(\tau)t^2 \quad \text{Per qualche } \tau \in (0,t)$$

$\rightsquigarrow t = \|x-x_0\|$ e $\xi = x_0 + tv$

$\Downarrow$

$\varphi_v''(\tau) = \langle v, D^2 f(x_0+\tau v)\cdot v\rangle$ Si ottiene l'enunciato

Esempio:

$f(x,y) = e^{xy}\cos y$ Polinomio di Taylor al II ordine in $(0,0)$

$$f(x,y) = \left(1 + xy + o(xy)\right)\left(1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3)\right) = 1 + xy - \frac{y^2}{2} - \frac{xy^3}{2} + \underbrace{o(y^3) + o(y^3)\cdot xy - o(xy)\frac{y^2}{2} + o(xy)o(y^3)}_{= o(x^2+y^2) = o(\|x,y\|^2)}$$

anche questo tende a zero più velocemente

$$f(x,y) = 1 + xy - \frac{y^2}{2} + o(x^2+y^2)$$

dimostrazione: Prendo l'$o(\cdot)$ più grande

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{o(xy)}{x^2+y^2} = \overbrace{\frac{o(xy)}{xy}}^{\to 0 \text{ per definizione}} \cdot \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rimane da vedere quanto vale: Uso le c.p.

$$\left|\frac{\cancel{\rho^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}}\right| \le 1 \quad \text{limitata}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{o(xy)}{xy}\,\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

ESERCIZI: Calcolare i lim usando Taylor

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(e^x - x - \cos y)}{x^2+y^2}$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \sin(xy)}{x^2y^3}$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3y\sin x}\left(\frac{\sin y}{y} - \cos x\right)}{x^2+y^2}$$

4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y} - x\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

TAYLOR NEL CASO IN CUI $n=2$

se $n=2$ variabili

$$f(x) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$$

$$+ 2\left(\frac{1}{2} f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\right) + o\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)$$

$\boxed{\text{TEOREMA:} \quad \text{formula di Taylor di ordine } n}$ Caso generale.

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D aperto, $x_0 \in D$ definiamo il polinomio di Taylor di f in x_0 di ordine m:

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{\overset{\text{o } n?}{m}} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k = 1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(x_0)(x_{i_1} - x_{0_{i_1}})(x_{i_2} - x_{0_{i_2}}) \dots (x_{i_k} - x_{0_{i_k}})$$

(i) $f(x) = T_m(x) + o(\|x - x_0\|^m)$

e T_m è l'unico polinomio di grado m in $x \in \mathbb{R}^n$ per cui questo è vero

(ii) Se $[x, x_0] \subset D$, f è di classe C^{m-1} in $[x, x_0]$ e di classe C^m in (x, x_0) t.c.

$$f(x) = T_{m-1}(x) + \overbrace{\frac{1}{m!} \sum_{i_1 \dots i_m = 1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}}(\xi)(x_{i_1} - x_{0_{i_1}}) \dots (x_{i_m} - x_{0_{i_m}})}^{\text{Resto Lagrange di ordine } m}$$

Def:	PUNTO STAZIONARIO

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D aperto, $x_0 \in D$

x_0 si dice punto stazionario per f se $\nabla f(x_0) = 0$

$\boxed{n=2}$ Equazione del Piano tangente nel punto (x_0, y_0)

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

se x_0, y_0 è stazionario $\Rightarrow z = f(x_0, y_0) \Rightarrow$ il piano tangente è orizzontale

Def:	PUNTO ESTREMALE

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, si dice un punto di minimo (o di massimo) relativo se $\exists\ U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \geq f(x_0)$ $\left(f(x) \leq f(x_0) \right)$ $\forall x \in U \cap D$ $\to$ SOLO PER UN INTORNO

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, si dice minimo (massimo) assoluto se

$f(x) \geq f(x_0)$ $\left(f(x) \leq f(x_0) \right)$ $\forall x \in D$ $\to$ PER TUTTO IL DOMINIO

UN PUNTO ESTREMALE DI f È UN PUNTO DI MASSIMO O DI MINIMO

2

TEOREMA DI FERMAT	Relazione tra punto stazionario e estremale

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ (→ INTERNO) è punto <u>estremale</u> per f, f è <u>diff.</u> in x_0

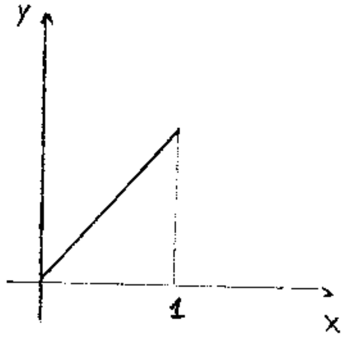
$\Downarrow$

(def: $\nabla f(x_0) = 0$ allora x_0 è STAZIONARIO)

X_0 È UN PUNTO STAZIONARIO

X_0 è estremale e differenziabile $\Rightarrow$ stazionario

a che serve?



versore della base canonica ↑

dim.

Definiamo: $\varphi_{e_j}(t) := f(x_0 + te_j)$ dove e_j è un vettore della base canonica.

Per Hp x_0 è minimo relativo per f $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ per definizione $V = B_\delta(x_0)$

$\Rightarrow$ Stiamo considerando una palla di raggio δ, ovvero un intorno di x_0 t.c. $f(x) \geq f(x_0)$

Prendo $|t| < \delta$

$$\varphi_{e_j}(t) = f(\underbrace{x_0 + te_j}_{B_\delta(x_0)}) \geq f(x_0) = \varphi_{e_j}(0)$$

Per il T. di Fermat ad una variabile

per $t = 0$ è un minimo locale per φ_{e_j} $\Rightarrow \varphi'_{e_j}(0) = 0$

Svolgimento del prodotto scalare ← perché? $\forall\, j = 1 \dots n$

$$0 = \varphi'_{e_j}(0) = \langle \nabla f(x_0), e_j \rangle = f_{x_j}(x_0) \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$$

Regola della Catena

$$\left(\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=t_0} = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle \right)$$

Se ESTREMALE e DIFFERENZIABILE $\Rightarrow$ STAZIONARIO

STAZIONARIO $\not\Rightarrow$ ESTREMALE

Esempio:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \quad \rightarrow \quad \nabla f(x,y) = (2x, -2y) = (0,0) \Updownarrow (x,y) = (0,0)$$

$(0,0)$ = unico punto stazionario

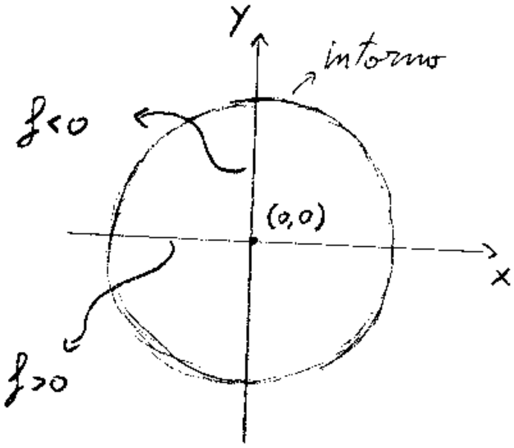
ma $(0,0)$ non è un punto né di massimo né di minimo.

Vediamo infatti come si comporta sugli assi:

$f(x,0) = x^2 \geq 0$

$f(0,y) = -y^2 \leq 0$

l'intorno non è definito né positivo né negativo

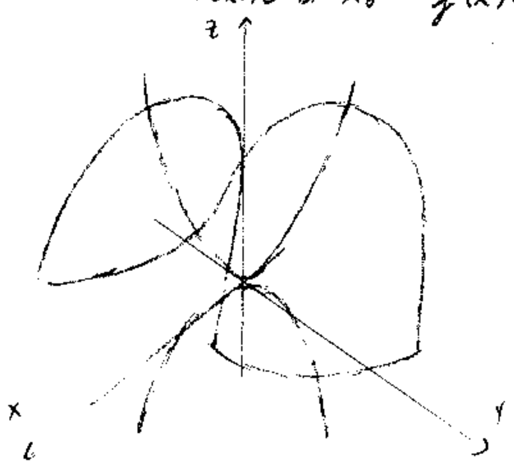


Infatti siamo davanti ad un punto di Sella.

$\boxed{\text{Def:}}$ $\boxed{\text{PUNTO DI SELLA}}$

$x_0 \in D$ punto stazionario per f <u>È DETTO DI SELLA SE</u>:

IN OGNI INTORNO DI x_0 $f(x) - f(x_0)$ assume sia valori positivi che negativi



Def: MATRICE POSITIVA/NEGATIVA

A MATRICE $n \times n$ SYM, A si dice definita positiva (negativa) se:

~~cosa vuol dire praticamente.~~

$\langle Av, v \rangle > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \ v \neq 0 \qquad (\langle Av, v \rangle < 0)$

Def: SEMIDEFINITA

Cambia solo $\geq$

A si dice semidefinita positiva se: $\langle Av, v \rangle \geq 0$

Def: INDEFINITA

A si dice indefinita se $\exists \ v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ t.c. $\langle Av_1, v_1 \rangle > 0$ e

$\langle Av_2, v_2 \rangle < 0$

TEOREMA

A MATRICE SYM $n \times n$, $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ i suoi autovalori; Allora:

(i) A è <u>definita</u> positiva (negativa) $\iff \lambda_1 \dots \lambda_n > 0 \quad (< 0)$

(ii) A è <u>semidefinita</u> positiva (negativa) $\iff \lambda_1 \dots \lambda_n \geq 0 \quad (\leq 0)$

(iii) A è <u>indefinita</u> $\iff \exists \ \lambda_i, \lambda_J \ | \ \lambda_i > 0, \ \lambda_J < 0$

dim. (i) $\Downarrow$ [Hp che A è definita positiva, dimostro che λ_j è positivo]

come? ↑ dimostro il suo autovalore è possibile

$\exists\, v_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ t.c. $A v_j = \lambda_j v_j$ [Vedere geometria]

$\langle A v_j, v_j \rangle > 0$ Per Hp $\Rightarrow \langle A v_j, v_j \rangle = \langle \lambda_j v_j, v_j \rangle = \lambda_j \|v_j\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ dato che $\langle Av, v\rangle > 0$ e $\|v\|^2 > 0$ anche $\lambda_j > 0$ ∎

dim. (i) $\Uparrow$ [Hp che λ_j è positivo, dimostro che A è def. positiva] **FARSI SPIEGARE**

Sia $v_1, v_2, \dots v_n$ una base ortonormale di <u>autovettori</u> di A

altrimenti sarebbe semidefinita

$A v_j = \lambda_j v_j \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$V = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ con $(\alpha_1, \dots \alpha_n) \neq (0, 0, \dots 0)$

$$\langle Av, v\rangle = \left\langle A\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right), \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A v_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k \lambda_j \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j^2 > 0$$ ∎

Hp $\lambda_i > 0$

Costituisce una base ortonormale in cui i vettori V_j e V_K se sono paralleli (ovvero $j = k$) il prodotto scalare $= 1$. Altrimenti ($j \neq k$) il prodotto $= 0$

$\alpha_K = \alpha_j$ se $j = k$.

$\boxed{\text{dim. (iii)} \Downarrow}$

- Per assurdo se $\lambda_1 \dots \lambda_n > 0$ allora A definita positiva $\Rightarrow$ ASSURDO

$\boxed{\text{dim. (iii)} \Uparrow}$

$\langle A v_j, v_j \rangle = \lambda_i > 0 \qquad \langle A v_k, v_k \rangle = \lambda_k < 0 \quad \Rightarrow A$ INDEFINITA

Se $n=2$ $\quad A$ È DEFINITA POSITIVA (NEG.) $\Leftrightarrow \underbrace{\det > 0}_{\text{PRODOTTO AUTOVALORI}}$ e $\underbrace{\operatorname{Tr} A > 0}_{\text{SOMMA AUTOVALORI}}$ (<0)

Perché?

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ $\quad A$ definita positiva (neg) $\Leftrightarrow \det A > 0$ e $a > 0$ $(a<0)$

TEOREMA: Condizione sufficiente del secondo ordine per l'estremalità

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D aperto, $x_0 \in D$ punto stazionario per f e f 2 volte differenziabile in x_0. Allora:

(i) Se $D^2 f(x_0)$ è definita positiva $\Rightarrow x_0$ è minimo relativo

(ii) Se $D^2 f(x_0)$ è definita negativa $\Rightarrow x_0$ è massimo relativo

(iii) Se $D^2 f(x_0)$ è indefinita $\Rightarrow x_0$ è punto di sella

Esempi:

$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 - 8$ $\qquad f$ è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\cdot\, f_x = 4x^3 + 2xy^2 - 4x = 2x(2x^2 + y^2 - 2) = 0$

$\cdot\, f_y = 2yx^2 + 4y = 2y(x^2+2) = 0 \implies y = 0$ ⇝ SOSTITUISCO DENTRO f_x

$f_x = 4x(x^2-1) = 0 \implies x = 0\ ,\ x = \pm 1$

3 PUNTI STAZIONARI

CALCOLIAMOCI L'HESSIANO

$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 2y^2 - 4$

$f_{xy}(x,y) = 4xy \to f$ è regolare $\to$ T. SCHWARZ $\to f_{xy} = f_{yx}$

$f_{yy}(x,y) = 2x^2 + 4$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y^2 - 4 & 4xy \\ 4xy & 2x^2+4 \end{pmatrix}$$

in $(0,0)$ $D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ = INDEFINITA ⇒ PUNTO DI SELLA

in $(\pm 1, 0)$ $D^2 f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ = POSITIVA ⇒ PUNTO DI min.

1 10/10/19

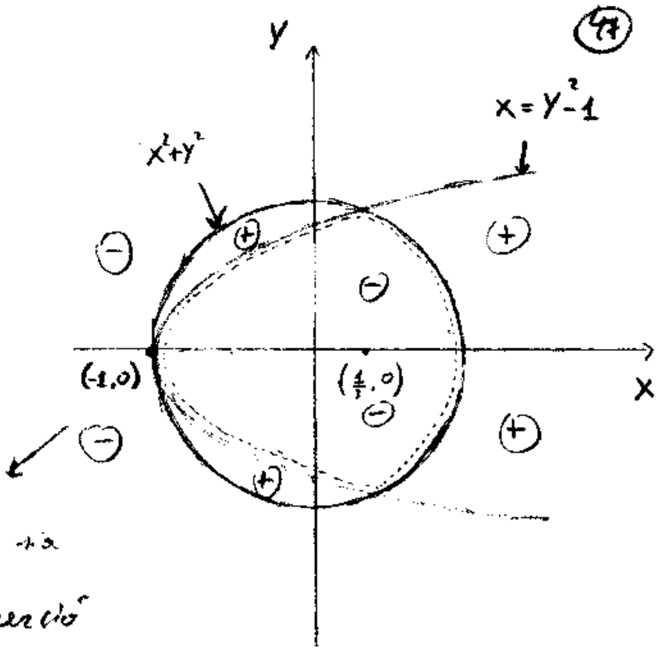
$f(-1,0) = 0$

- $x - y^2 + 1 > 0$

  $x > y^2 - 1$ a dx > 0

- $x^2 + y^2 - 1 > 0$

  $x^2 + y^2 > 1$



l'intorno è sia (+) che (−) perciò è un punto di sella.

$(\frac{1}{3}, 0)$ → si trova dentro un insieme chiuso e limitato ⇒ WEIERSTRASS ⇒ l'insieme ammette max o min. $f(x,y)$ in quell'insieme è (−) perciò $(\frac{1}{3}, 0)$ è un p.to di minimo

TEOREMA	Relazione tra l'hessiano e p.ti di min/max

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D aperto, f 2 volte diff. in $x_0 \in D$,

x_0 punto stazionario:

(i) $D^2 f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ minimo relativo

(ii) $D^2 f(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ massimo relativo

(iii) $D^2 f(x_0)$ indefinito $\Rightarrow x_0$ sella

$\boxed{\text{dim. (i)}}$ $\boxed{\text{Devo dimostrare che } f(x)-f(x_0)>0}$

. x_0 stazionario $\Rightarrow \nabla f(x_0)=0$

$$f(x)=f(x_0)+0+\frac{1}{2}\langle D^2f(x_0)(x-x_0),\ x-x_0\rangle+o(\|x-x_0\|^2)$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\|x-x_0\|^2}=\frac{\frac{1}{2}\langle D^2f(x_0)(x-x_0),\ x-x_0\rangle}{\|x-x_0\|^2}+o(1)=\frac{1}{2}\langle D^2f(x_0)\underbrace{\left(\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}\right)}_{v},\ \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}\rangle+o(1)$$

$\Rightarrow \|v\|=1$

$\min_{\|v\|=1}:=\langle D^2f(x_0)v,v\rangle>0$ Per il Teorema di Weierstrass.

chi me lo dice

$\Rightarrow$ funzione continua in un insieme chiuso e limitato, ed è >0

perciò anche il min è >0.

Poichè la funzione $v\in\mathbb{R}^n\longrightarrow\langle D^2f(x_0)v,v\rangle$ è continua (è un polinomio di II grado) e l'insieme $\{v\in\mathbb{R}^n \mid \|v\|=1\}$ è chiuso e limitato

$$\langle D^2f(x_0)v,v\rangle\geq 0 \quad \forall v \mid \|v\|=1$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\|x-x_0\|^2}\geq\frac{m}{2}+o(1)$$

per $x\to x_0$ $\Rightarrow \lim_{x\to x_0}o(1)=0$ $\Rightarrow \exists\delta>0 \mid \|x-x_0\|<\delta$

$\Rightarrow |o(1)|<\frac{m}{4}$

$\boxed{-\frac{m}{4}<o(1)<\frac{m}{4}}$

$$\frac{m}{2}+o(1)>\frac{m}{2}-\frac{m}{4}=\frac{m}{4}>0$$

Se $\|x-x_0\|^2<\delta \Rightarrow f(x)-f(x_0)>\frac{m}{4}\|x-x_0\|^2>0 \Rightarrow x_0$ è min. Relativo.

Perchè ci serve questa condizione?

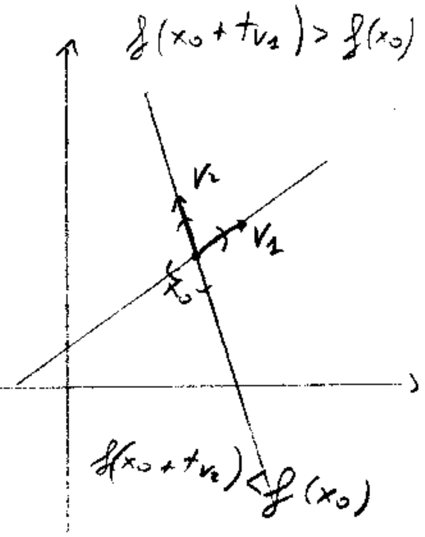
2|

(ii) analoga

dim (iii)	$f(x_0+tv_1)<f(x_0)$ e $f(x_0+tv_2)>f(x_0)$

$\exists^{mo}$ autovalori $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ con autovettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

$\|v_1\|=\|v_2\|=1$



$$f(x_0+tv_1)=f(x_0)+\frac{1}{2}\langle D^2f(x_0)(tv_1),tv_1\rangle+o(t^2)=$$

$\|tv_1\|=|t|$

$$=\frac{f(x_0+tv_1)-f(x_0)}{t^2}=\frac{1}{2}\frac{\langle \overbrace{D^2f(x_0)(\cancel{t}v_1)}^{\lambda_1 v_1=D^2f(x_0)\cdot v_1},(\cancel{t}v_1)\rangle}{\cancel{t^2}}+o(1)$$

$$=\frac{1}{2}\langle\lambda_1\underbrace{v_1,v_1}_{\|v_1\|=1}\rangle+o(1)=\frac{1}{2}\lambda_1+o(1)>\frac{\lambda_1}{4}>0 \text{ per } |t|<\delta$$

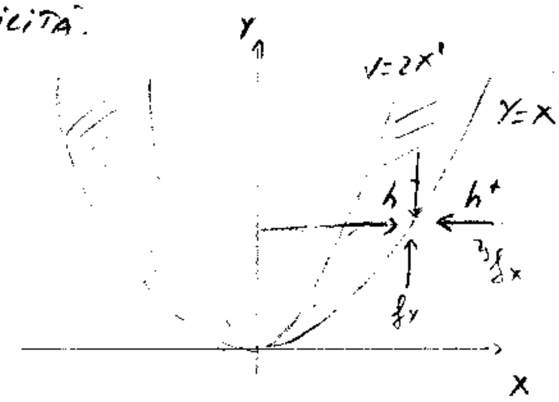
$-\frac{\lambda_1}{2}<o(1)<\frac{\lambda_1}{2}$ → perchè per $x\to x_0$ $\lim_{x\to x_0} o(1)=0$

Faccio lo stesso cosa con v_2. $\Rightarrow \frac{\lambda_2}{4}<0$ → Mi avvicino in 2 modi differenti ottengo 2 segni differenti

---

ESERCIZI SULLA DERIVABILITÀ e DIFFERENZIABILITÀ

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & x^2<y<2x^2\\ y & \text{altrimenti}\end{cases}$$

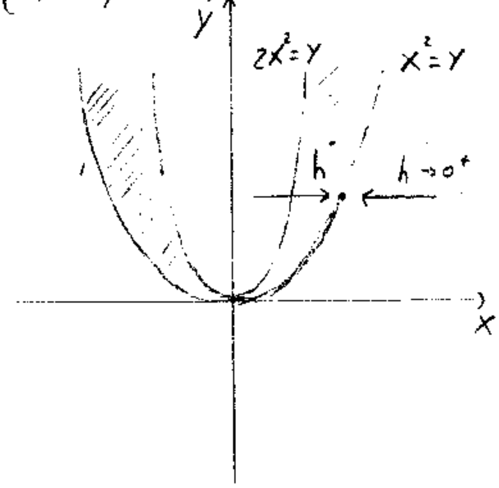


f è continua in

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\neq 2x^2$ e $y\neq x^2\}\cup\{(0,0)\}$

$\boxed{\text{derivabilità:}}$

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & x^2<y<2x^2\\ y & y<x^2 \text{ e } y>2x^2\end{cases}$$



$$f_x(x,y)=\begin{cases}0 & x^2<y<2x^2\\ 0 & y<x^2 \text{ o } y>2x^2\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}0 & x^2<y<2x^2\\ 1 & y<x^2 \text{ o } y>2x^2\end{cases}$$

Sfrutto la definizione di derivata → per capire se $f(x,y)$ è derivabile o meno sulle parabole $y=x^2$ e $y=2x^2$

Se mi avvicino alla parabola $y=x^2$ da sinistra

$$\lim_{h\to0^-}\frac{\overset{=0}{f(\bar{x}+h,\bar{x}^2)}-\overset{=0}{f(\bar{x},\bar{x}^2)}}{h}=0$$

→ dovrebbe essere $=y$ dato che mi avvicino da sx?

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(\bar{x}+h,\bar{x}^2)-\overset{=0}{f(\bar{x},\bar{x}^2)}}{h}=\frac{\bar{x}^2-0}{h}=+\infty$$

Se $\bar{x}\neq0$ $\nexists\ f_x(\bar{x},\bar{x}^2),\ f_y(\bar{x},\bar{x}^2)$

Stessa cosa succede per $y=2x^2$ $\nexists\ f_x(\bar{x},2\bar{x}^2),\ f_y(\bar{x},2\bar{x}^2)$

} derivabile fuori dalle parabole

in $(0,0)$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\overset{=0}{f(h,0)}-\overset{=0}{f(0,0)}}{h}=0 \Leftarrow f_x(0,0)$$

e

nell'origine

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\frac{h}{h}=1 \Leftarrow f_y(0,0)$$

differenziabilità:

f non diff. sulle parabole per $x \neq 0$.

Vediamo cosa succede nell'origine: non posso usare il T. del diff. totale ✓ (perchè l'intorno non è definito.)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overset{0}{f(x,y)} - \overset{0}{f(0,0)} - \overset{1}{f_x(0,0)}\cdot x - f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

= distinguo due casi =

tra le due parabole $= \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x^2<y<2x^2}} \dfrac{\overset{f(x,y)=0}{-y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

MAGGIORO

$$\left|\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|2x^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{C.P.}{=} \frac{2\rho^2\cos^2\theta}{\rho} \leq 2\rho \to 0$$

fuori delle parabole:

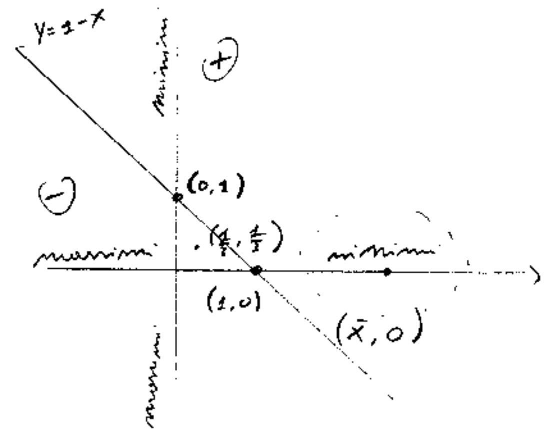
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y<x^2 \text{ o } y>2x^2}} \frac{f(x,y)-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

f è differenziabile nell'origine.

$f(x,y) = |xy| \, (x+y-1)$

C'è il modulo: dobbiamo calcolare dove è derivabile

in $xy=0 \Rightarrow f(xy)=0$



STUDIO IL SEGNO: Dato che $|xy| \geq 0$ sempre studio solo il polinomio di dx.

$f(x,y) > 0 \iff x+y-1>0 \iff y>1-x$

$\{(\bar{x},0) \mid \bar{x}>1\}$ minimi relativi

$\{(0,\bar{y}) \mid \bar{y}>1\}$ min. relativi

} Perché? Chi ci dice che la funzione li intorno è maggiore di $f(x_0)$

$\{(\bar{x},0) \mid \bar{x}<1\}$ max. rel.

$\{(0,\bar{y}) \mid \bar{y}<1\}$ max rel.

$(1,0)$ e $(0,1)$ né min né max.

$\to xy=0$ ci dice che la $f=0$ sugli assi $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ perciò se a dx è ⊕, i punti sull'asse $x, y>1$ sono minimi perché lì f è strettamente >0.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x+y-1) & xy>0 \\ -xy(x+y-1) & xy<0 \end{cases}$$

Derivabilità:

perché sono strettamente positivi

$\boxed{xy>0}$
$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy+y^2-y = \cancel{y}(2x+y-1)=0 & y=1-2x \\ f_y(x,y) = x^2+2xy-x = \cancel{x}(x+2y-1)=0 & x=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y=\frac{1}{3}$$

Unico punto stazionario $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \to$ questo p.to appartiene all'insieme $xy>0$

$\boxed{xy<0}$ $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ non è nell'insieme di definizione e quindi va scartato

4

ESERCIZI.

$f_{xx}(x,y) = 2y$

$f_{yx}(x,y) = 2x+2y-1$

$f_{yy}(x,y) = 2x$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}$$

$$D^2 f\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\det D^2 f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \dots > 0$

$\mathrm{tr}\, D^2 f() > 0$ min relativo.

$\boxed{y = x}$ Perché l'abbiamo fatto?

$f(x,x) = x^2 (2x-1)$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x,x) = \pm\infty$ → sulla bisettrice f va a più infinito e meno.

i max e min che abbiamo trovato sono relativi.

$f(x,y) = x^4 + y^4 + (x+y)^2 + 1$

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 + 2(x+y) = 0 \\ f_y = 4y^3 + 2(x+y) = 0 \end{cases}$$

→ SOTTRAGGO LE 2 EQ ⇒ $4(x^3 + y^3) = 0 \iff x = y$

$f_x = 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1) = 0 \iff x = 0$ $(0,0)$ p.to stazionario.

Calcoliamo l'Hessiano:

$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 2$

$f_{yy}(x,y) = 12y^2 + 2$

$f_{xy}(x,y) = 2$

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ESERCIZI

det = 0 $\Rightarrow$ c'è un autovalore che è zero.

Matrice semidefinita.

Dobbiamo studiarlo in un altro modo.

POCO CANONICO

$f(0,0) = 1$ $\rightarrow$ nell'intorno di zero f è > 1 poiché è somma di tutte cose > 0

$f(x,y) > 1 \quad \forall (x,y) \neq (0,0) \Rightarrow (0,0)$ minimo relativo e assoluto

---

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ f_y = 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = -x \quad \rightarrow x = 0, \; x = \pm\sqrt{2}$$

P.ti stazionari sono $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Hessiana

$f_{xx} = 12x^2 - 4 \qquad f_{xy} = 4 \qquad f_{yy} = 12y^2 - 4$

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

in $(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ det = 0 semidefinita

in $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow$ det > 0, tr > 0 minimo relativo

in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow$ det > 0, tr > 0 minimo relativo

ESERCIZI

$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

① Continuità

② Derivo parzialmente

③ Trovo p.ti stazionari

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4y = 0 \rightarrow x^3 = y & y = 0 \quad y = \pm 1 \\ f_y = 4y^3 - 4x = 0 \quad x^9 = x \iff x = 0 \ , \ x = \pm 1 \end{cases}$$

P.ti stazionari sono: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$

④ Calcolo l'Hessiano

$f_{xx} = 12x^2$

$f_{xy} = -4$

$f_{yy} = 12y^2$

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

<u>semidefinita</u>

non possiamo dire nulla al riguardo.

$$(\pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \det > 0 \\ tr > 0 \end{matrix}$$ minimi relativi

in $(0,0)$ $f = 0$, Come si comporta l'intorno di f in $(0,0)$?

Uso gli assi cartesiani:

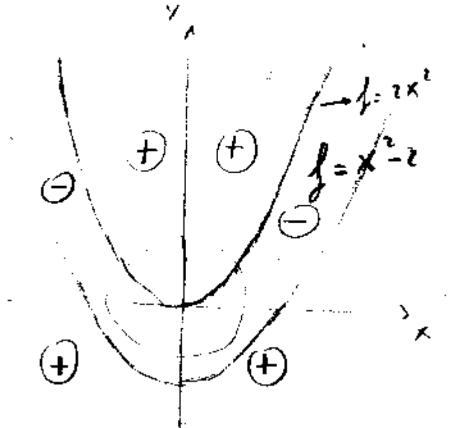
$f(x,0) = x^4 > 0$

$f(0,y) = y^4 > 0$

Sulla bisettrice

$f(x,x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2)$

$$2x^2(x^2-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$



punto di sella

Relativi o assoluti

Vedo come si comporta la f all'infinito

$\lim_{(x,y) \to \infty} x^4 + y^4 - 4xy \overset{c.p.}{=} \rho^4\cos^4\theta + \rho^4\sin^4\theta - 4\rho^2\cos\sin$

$f(\pm 1, \pm 1) = 2 - 4 = -2$ allora è minimo assoluto

$|4\rho^2\cos\sin| < 4R^2$

$-4R^2 < 4\rho^2\cos\sin < 4R^2$

tutto moltiplicato per $(-)$

$-4\rho^2 \leq -4\rho^2\sin\cos < 4R^2$

Come faccio a sapere se f tende a $\pm\infty$?

devo fare il limite della funzione per $x, y \to \pm\infty$?

ESERCIZI

$f(0,0)=0$ bisogna capire il segno nell'intorno

Mi restringo a qualche retta

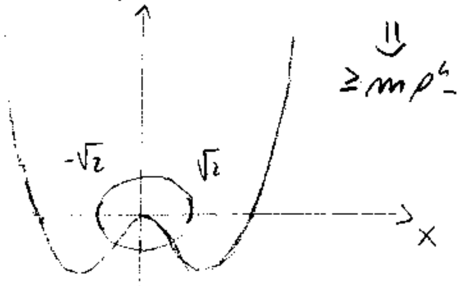
Se faccio con gli assi

$f(x,0)= x^4-2x^2=x^2(x^2-2)$ → $x=0$, $x=\pm\sqrt{2}$

$f(x,0)<0$ in un intorno di x_0

$f(x,x)=2x^4>0 \quad \forall x\neq 0$

→ Sella $(0,0)$



$\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)-4\rho^2$ (96)

$\overset{\vee}{0} \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$

⇓ → WEIERSTRASS

$\exists\ m=\min_{\theta\in[0,2\pi]}\{\cos^4\theta+\sin^4\theta\}>0$

⇓

$\geq m\rho^4-4\rho^2 \to +\infty$ per $\rho\to+\infty$

perché

$\lim_{(x,y)\to\infty} x^4+y^4-4xy=+\infty$

⇓

$\exists$ min. assoluto di f

Se il determinante viene $=0$ Vedere come si comporta la funzione nell'intorno di quel punto, e nel punto preciso.

$f(x,y)$ in $(0,0)=0$ ⇒ VEDO L'INTORNO ⇒ COME? Studio sugli assi: $y=0$ ⇒

⇒ $x=0$ $x=\pm\sqrt{2}$ ⇒ f viene positiva e negativa nell'intorno ⇒ p.to di sella.

ESERCIZI

$f(x,y) = xy(x-1) = x^2y - xy$

$$\begin{cases} f_x = 2xy - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0: & -y=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1: & 2y - y = 0 \Rightarrow 2y = y \Leftrightarrow y=0 \end{cases} \\ f_y = x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1 \end{cases}$$

P.ti stazionari sono: $(0,0)$, $(1,0)$

il det<0 è una condizione necessaria affinché io sappia che quello è un p.to di sella?

Hessiana:

$f_{xx} = 2y$

$f_{xy} = 2x-1$

$f_{yy} = 0$

$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \quad \det < 0, \quad tr = 0$$

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det < 0, \quad tr = 0$$

Def. di max e min.:

se $tr > 0 \to$ min $tr < 0$ max

se $a > 0 \to$ min $a < 0$ max.

Quale delle due.

ESERCIZI

$f(x,y) = xe^y - ye^x$

$$\begin{cases} f_x = e^y - ye^x = e^y - e^{\log y} e^x = y - (\log y + x) \Rightarrow \quad x = \log y - y \\ f_y = xe^y - e^x = 0 \qquad (\log y - y) e^y - e^{\log y - y} = (\log y - y)e^y - \dfrac{y}{e^y} = \end{cases}$$

$$= \frac{e^{2y}(\log y - y) - y}{e^y} = 0 \qquad \textbf{NO} \qquad a^x = b \quad \log_a b = x$$

$f_x = e^y - ye^x = 0 \qquad e^x = \dfrac{e^y}{y} \Rightarrow x = \log \dfrac{e^y}{y} = y - \log y$

$f_y = xe^y - e^x = 0$

$\log \dfrac{e^y}{y} \cdot e^y - \dfrac{e^y}{y} = 0 \Rightarrow (y - \log y) e^y - \dfrac{e^y}{y} = 0$

$\cancel{e^y}\left(y - \log y - \dfrac{1}{y}\right) = 0 \qquad y - \log y - \dfrac{1}{y} = 0 \Rightarrow \log y - \dfrac{y}{y} \Rightarrow \cancel{y = e^{-\frac{y}{1}}}$

$\Downarrow \quad y = 1 \quad x = 1$

$y = e^{\log y}$

$$\begin{cases} e^x = \dfrac{e^y}{y} \\ xe^y - \dfrac{e^y}{y} = 0 \qquad e^y\left(x - \dfrac{1}{y}\right) \end{cases}$$

$e^y - ye^x = 0$

$xe^y - e^x = 0$

$$\frac{e^y - ye^x}{xe^y - e^x} = 0 = \frac{e^y}{xe^y - e^x} - \frac{ye^x}{xe^y - e^x} = 0$$

$$\frac{e^y}{xe^y - e^x} = \frac{ye^x}{xe^y - e^x} \qquad \frac{e^x\left(\frac{e^y}{e^x} - y\right)}{e^y\left(x - \frac{e^x}{e^y}\right)}$$

ESERCIZI

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xyz$$

· Derivabilità:

$x = \pm y$, $z = \pm 2$

$$\begin{cases} f_x = 2x - yz = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{yz}{2}} \\ f_y = 2y - xz = 0 \Rightarrow 2y - \frac{yz^2}{2} = y\left(2 - \frac{z^2}{2}\right) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2 \end{cases} \\ f_z = 2z - xy = 0 \end{cases}$$

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 = y = \mp 2$

$-4 + x^2 =$ $\quad z^2 = 4$

$y = 0$: $2x - yz = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 0$

$z = 2$: $2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \quad x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \quad y = \pm 2$

$z = -2$: $2x + 2y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow -4 + x^2 = 0 \quad x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \quad y = \mp 2$

P.ti stazionari: $(0,0,0)$, $(2,2,2)$, $(-2,-2,2)$, $(2,-2,-2)$, $(-2,2,-2)$

$$\begin{cases} 2x - yz = 0 \\ 2y - xz = 0 \\ 2z - xy = 0 \end{cases} \quad x = \frac{yz}{2} \quad \begin{cases} x = \frac{yz}{2} \\ 2y - \frac{yz^2}{2} = 0 \\ 2z - \frac{y^2 z}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{yz}{2} \\ y\left(2 - \frac{z^2}{2}\right) = 0 \begin{cases} y = 0 \ (1) \\ z = +2 \ (2) \quad z = -2 \ (3) \end{cases} \\ z\left(2 - \frac{y^2}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $(0,0,0)$ ✓

(2) $\begin{cases} x = y \\ 2\left(2 - \frac{y^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow 4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2 \\ z = 2 \end{cases}$ $\quad x = \pm 2$, $z = 2$ $\quad (2,2,2)$ ✓ $\quad (-2,-2,2)$ ✓

(3) $\begin{cases} x = -y \\ -2\left(2 - \frac{y^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2 \\ z = -2 \end{cases}$ $\quad x = \mp 2$, $z = -2$ $\quad (-2,+2,-2)$ ✓ $\quad (2,-2,-2)$ ✓

Hessiana: $f_x = 2x - yz$ $f_y = 2y - xz$ $f_z = 2z - xy$

ESERCIZI

$f_{xx} = 2$ $f_{xy} = -z$

$f_{yy} = 2$ $f_{xz} = -y$

$f_{zz} = 2$ $f_{yz} = -x$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -z & -y \\ -z & 2 & -x \\ -y & -x & 2 \end{pmatrix}$$

in $(0,0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$ $\det > 0$, $tr > 0$ punto di min.

$\lim_{(x,y,z) \to \infty} = -\infty$

$\lim_{(x,y,z) \to -\infty} = \infty$

Non ammette minimi o max assoluti.

in $(2,2,2)$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$ $\det = 8 + (-8) + (-8) - (8) - (8) - (8) < 0$

$tr > 0$ Punto di Sella

in $(-2,-2,2)$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ $\det = 8 + (-8) + (-8) - (8) - (8) - (8) = < 0$

P.to Sella

in $(-2,+2,-2)$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ $\det = 8 + (-8) + (-8) - (8) \cdots < 0$

P.to di Sella

in $(2,-2,-2)$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$ $\det = 8 \ldots < 0$

P.to di Sella

ESERCIZI

$$f(x,y,z) = (x^3-3x-y^2)z^2 + z^3 = z^2x^3 - 3xz^2 - y^2z^2 + z^3$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2z^2 - 3z^2 = 0 = z^2(x^2-1)=0 \\ f_y = -2yz^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{matrix} y=0 \ (1) \\ z=0 \ (2) \end{matrix} \right. \quad \} (0,0,0) \\ f_z = 2zx^3 - 6zx - 2zy^2 + 3z^2 = 0 : \quad z(2x^3-6x-2y^2+3z)=0 \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} z^2(x^2-1)=0 \quad \left\langle \begin{matrix} z=0 \\ x=\pm 1 \ (3) \end{matrix} \right. \\ y=0 \\ z(2x^3-6x+3z)=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=1 \\ -2yz^2=0 \quad \left\langle \begin{matrix} y=0 \ (4) \\ z=0 \ (5) \end{matrix} \right. \\ 2z-6z-2zy^2+3z^2=0 \quad \Rightarrow (6) \Rightarrow \end{cases}$

$z=0 \to \forall (x,y)$ è soluzione

$\Rightarrow (6) \Rightarrow 2z-6z+3z^2=0 \quad z(-4+3z)=0 \Rightarrow z=\frac{4}{3}$

(4) ?

$(1,0,0)$, $(1,0,\frac{4}{3})$ ✓

Pat. stazionari

$\{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$\cancel{(4)}$ compreso.

$\Rightarrow (5) \quad -2zy^2=0 \Rightarrow 0$ ✓

$(-1,0,0)$ ✓

$(-1,0,-\frac{4}{3})$

$\begin{cases} x=-1 \\ -2yz^2=0 \\ -2z+6z-2zy^2+3z^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \ / \ z=0 \\ \downarrow \qquad \downarrow \end{cases}$

$y=0$

$-2z+6z+3z^2=0$

$4z+3z^2=0 \Rightarrow (4+3z)=0 \Leftrightarrow z=-\frac{4}{3}$

$f_x = 3x^2z^2 - 3z^2 = 0 \qquad f_y = -2yz^2 \qquad f_z = 2zx^3 - 6zx - 2zy^2 + 3z^2 = 0$

ESERCIZI

$(0,0,0)$, $\cancel{(\ldots)}$, $(1, 0, \frac{4}{3})$, $(-1, 0, -\frac{4}{3})$, $\cancel{(\ldots)}$, $(x, y, 0)$

$f_{xx} = 6xz^2 \qquad f_{yy} = -2z^2 \qquad f_{zz} = 2x^3 - 6x - 2y^2 + 6z = 0$

$f_{xy} = 0 \qquad f_{xz} = 6x^2z - 6z \qquad f_{yz} = -4yz$

$$H = \begin{pmatrix} 6xz^2 & 0 & 6x^2z - 6z \\ 0 & -2z^2 & -4yz \\ (6x^2z - 6z) & (-4yz) & (2x^3 - 6x - 2y^2 + 6z) \end{pmatrix}$$

$6 \cdot -\frac{4}{3} \qquad -1 \;\; 1 \;\; 6 \qquad -8$

~~in (0,0,0) H = (0 0 0; 0 0 0; 0 0 0) det = 0~~

in $(-1, 0, -\frac{4}{3})$ $H = \begin{pmatrix} -\frac{32}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{32}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ det<0 sella

in $(1, 0, \frac{4}{3})$ $H = \begin{pmatrix} \frac{32}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{32}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ det<0 sella ✓

~~det = 0 ⇒ f(0,0,0) ... studio come è nell'intorno~~

Pt. del Piano (x, y) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x^3 - 3x - y^2) \end{pmatrix}$ 2 autovalori = 0 semidefinita

se 1 autovalore = 0 era indefinita e uno era positivo e l'altro negativo

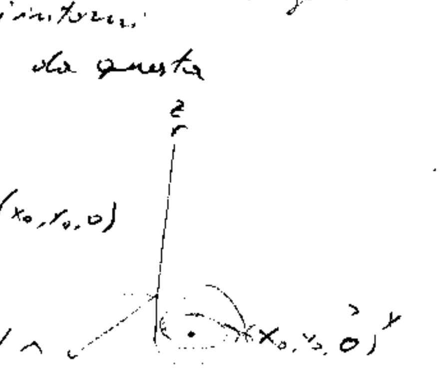
$f(x,y,z) = (x^3 - 3x - y^2)z^2 + z^3 =$

$= z^2 \underbrace{(x^3 - 3x - y^2 + z)}$ ⇒ Cosa succede nel piano x,y e nei suoi intorni: il segno della funzione dipende solo da questa

$\Rightarrow f(x,y,0) = 0 \qquad g(x,y,0) = x^3 - 3x - y^2$ ↳ STUDIO IL SEGNO

fisso un punto $(x_0, y_0, 0)$ t.c. $g(x_0, y_0, 0) > 0 \Rightarrow \exists\, U$ intorno di $(x_0, y_0, 0)$

t.c. $g(x, y, 0) > 0 \;\; \forall (x, y, z) \in U$ $\Rightarrow f(x,y,z) \geq 0 \;\; \forall (x,y,z) \in U \wedge$

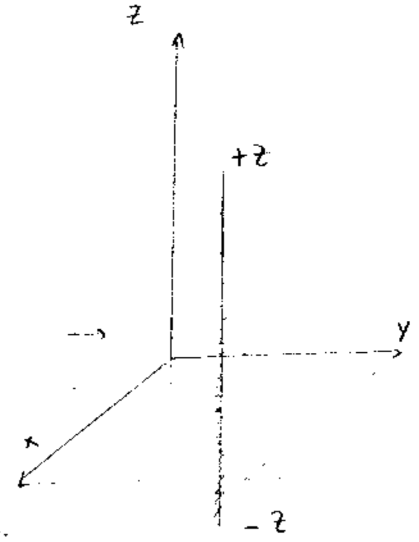


$\{(x_0, y_0, 0) \mid x_0^3 - 3x_0 - y_0^2 > 0\}$ minimi relativi

$\{(x_0, y_0, 0) \mid x_0^3 - 3x_0 - y_0^2 < 0\}$ massimi relativi

$\{(x_0, y_0, 0) \mid x_0^3 - 3x_0 - y_0^2 = 0\}$ $f(x,y,z) = z^3$ —

cambia segno nel suo intorno => p.to di Sella.



Def | Differenziabilità di un vettore

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D aperto, f si dice <u>differenziabile</u> in $x_0 \in D$ se:

$\exists$ M matrice $\underset{\text{colonne}}{\overset{\text{righe}}{m \times n}}$ t.c.: $f(x) - f(x_0) - \underbrace{M \overbrace{(x - x_0)}^{\mathbb{R}^n}}_{\mathbb{R}^m} = o(\|x - x_0\|) \iff$

vettore → devo farlo per tutte le componenti del vettore.

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - M(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f_j(x) - f_j(x_0) - (M(x - x_0))_j}{\|x - x_0\|} = 0 \quad \forall j = 1 \dots m$$

COME È DEFINITO $M \cdot (x - x_0)$:

$$\Big(M(x - x_0)\Big)_j = \sum_{k=1}^{n} M_{jk}(x_k - x_{0k}) = \langle M_j, x - x_0 \rangle \quad \Rightarrow$$

$\hookrightarrow M_j = (M_{j1}, M_{j2} \dots M_{jn}) \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f_j(x) - f_j(x_0) - \langle M_j, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0 \iff$$

f_j è differenziabile in x_0 e $M_j = \nabla f_j(x_0)$

le righe di questa matrice sono i gradienti delle componenti del vettore

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è diff. in $x_0 \in D$

$\Updownarrow$

$f_j: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è diff. in $x_0 \in D$ $\forall j = 1 \dots m$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{\boxed{n}}}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & & & \\ \frac{\partial f_{\boxed{m}}}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = J_f(x_0) = f'(x_0) = Df(x_0)$$

MATRICE JACOBIANA DI f

Se $m=1$ $Jf(x_0) = \nabla f(x_0)$

Matrice Hessiana derivate seconde di uno scalare

Matrice Jacobiana derivate prime di un vettore

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è diff in x_0

$\Downarrow$

f è continua in x_0

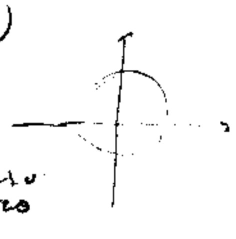
f è derivabile in x_0

f è $C^1(D) \Rightarrow f$ è diff in D.

Teorema del valor medio non si generalizza a funzioni vettoriali.

Esempio: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$



STESSA FUNZIONE

sempre diverso da zero

$$0 = \gamma(2\pi) - \gamma(0) \neq \gamma'(t)(2\pi - 0)$$

2| La regola della catena vale ancora

T.	REGOLA DELLA CATENA (caso generale).

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to E \subset \mathbb{R}^m$ D, E aperti

$g : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

f sia differenziabile in $x_0 \in D$

g sia differenziabile in $y_0 = f(x_0) \in E$ $\Rightarrow g \circ f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ è diff. in x_0 e

$\boxed{g \circ f = g \text{ composto } f}$

e $\underset{p \times n}{J_{g \circ f}}(x_0) = \underset{p \times m}{J_g}(f(x_0)) \underset{m \times n}{J_f}(x_0)$

$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Dim.

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) - \underbrace{J_g(f(x_0)) J_f(x_0)}_{J_{g\circ f}(x_0)}(x - x_0) \overset{?}{=} o(\|x - x_0\|)$$

$\Downarrow \to g$ è diff. in x_0

$$\left[g(f(x)) - g(f(x_0)) - J_g(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) = o(\|f(x) - f(x_0)\|) \right]$$

AGGIUNGO E SOTTRAGGO

$$\left(g(f(x)) - g(f(x_0)) - J_g(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + J_g(f(x_0))\left[f(x) - f(x_0) - J_f(x_0)(x - x_0) \right] \right) \cdot \|x - x_0\|^{-1} =$$

$$= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)) - J_g(f(x_0))(f(x) - f(x_0))}{\|x - x_0\|} + J_g(f(x_0)) \underbrace{\left[\frac{f(x) - f(x_0) - J_f(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \right]}_{x \to x_0}$$

$\downarrow 0$ poiché f è diff. in x_0

limitata

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0)) - J_g(f(x_0))[f(x)-f(x_0)]}{\|f(x)-f(x_0)\|} \cdot \frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|} =$$

$\|f(x)-f(x_0)\|$ → MOLTIPLICO E DIVIDO

$\downarrow$ per $x \to x_0$

$\Downarrow$ → poiché g è diff.

0

$f(x) \to f(x_0)$

$f(x)$ è diff.

$\downarrow$

ACCIUNGO E SOTTRAGGO

$$= \frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|} = \frac{\|\overbrace{[f(x)-f(x_0) - Jf(x_0)(x-x_0)] + Jf(x_0)(x-x_0)}\|}{\|x-x_0\|} \leq$$

non ci dovrebbe essere il modulo?

limitata

$$\leq \underbrace{\frac{\|f(x)-f(x_0)-J_f(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}}_{\substack{\downarrow \\ x\to x_0 \\ 0}} + \frac{J_f(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|} \leq \frac{\sqrt{C_{J_f(x_0)}}\ \cancel{\|x-x_0\|}}{\cancel{\|x-x_0\|}}$$

la equazione $= 0$

A matrice $m \times n$ $\quad V \in \mathbb{R}^n \quad \|AV\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{jk} V_{k} \right)^2 \leq$

$$\leq \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{jk}^2 \right)}_{C_A} \|V\|^2 = C_A \cdot \|V\|^2$$

costante che dipende da A

come fa a dirlo che è costante?

$g \circ f$ è differenziabile in x_0 e $J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0))\, J_f(x_0)$

3)

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad g : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

$g \circ f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_k}(x_0) = J_{g\circ f}(x_0)_{jk} = \left(J_g(f(x_0))\, J_f(x_0)\right)_{jk} = \sum_{l=1}^{m} J_g(f(x_0))_{j,l}\, J_f(x_0)_{l,k}$$

FORMULE DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

$$= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_l}(f(x_0))\, \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(x_0) = \frac{\partial (g\circ f)_j}{\partial x_k}(x_0)$$

$\to$?

Esempio:

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, (u,v) $\quad (n=2,\ m=3,\ p=1)$

$g : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, (x,y,z) $\quad f(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

$$\frac{\partial}{\partial u} g\circ f(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x}(f(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial z}(f(u,v))\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)$$

Esercizi:

1) Data $f(x,y) = x e^y - y e^x$ (a) Verificare che in un intorno di $x=0$ l'eq. $f(x,y)=0$ definisce implicitamente una funzione g t.c. $g(0)=0$

(b) Scrivere lo sviluppo di McLaurin di g al II ordine.

2) Data $f(x,y) = xy^2 + y + \sin(xy) + 3(e^x - 1)$ (a) Come (1)

(b) Calcolare: $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)+3x}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)+3x}{x^2}$

3) Data $f(x,y) = \sin(xy) + e^{2x} - \cos y - 2x + y$

(a) come 1

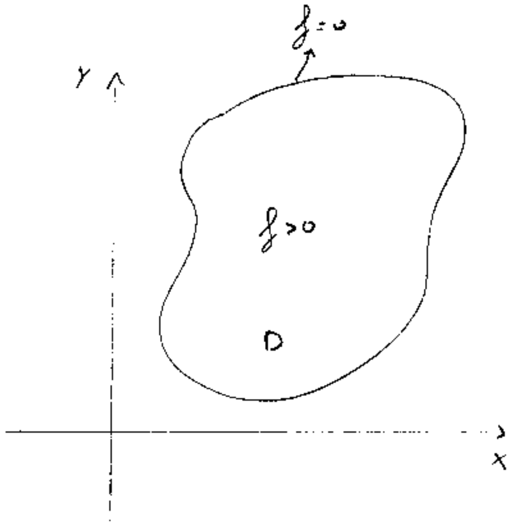
(b) Verificare che g ha un punto stazionario per $x=0$ e determinare la natura

ESERCIZI DELLA LEZIONE ⇒

Problema

min / max di $F(x,y)$ in un insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \geq 0\}$ con f continua

f continua $\Rightarrow$ D è chiuso $\quad \partial D = \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$



$\mathring{D} = \{(x,y) \mid f(x,y) > 0\}$

è il grafico di g

se è scritto in questa forma

Se $f(x,y) = y - g(x) \Rightarrow \partial D = \{(x,y) \mid y = g(x)\}$

DEF.	definita implicitamente

Sia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Una funzione $\underline{g} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>si dice definita implicitamente dall'equazione</u>

$f(x,y) = 0 \;(*)$ se $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I$.

Esempio:

$\hookrightarrow f(x,y) = y - g(x) \Rightarrow g$ è def. implicitamente da $f(x,y) = 0 \;(*)$

g è <u>definita implicitamente da (*)</u> $\Leftrightarrow$ <u>il grafico di g</u> $\{(x,y) \mid \underline{y = g(x)},\ x \in I\}$

<u>è contenuto nel luogo degli zeri di f</u> $\quad \Gamma = \{(x,y) \in D \mid \underline{f(x,y) = 0}\}$

ESEMPIO

(a) $f(x,y) = ax + by \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$ax + by = 0 \quad \exists\, g? \Rightarrow y = -\dfrac{a}{b}x$ se $b \neq 0 \Rightarrow$ la funzione $g(x) = -\dfrac{a}{b}x$ è definita implicitamente da $ax + by = 0$

$b = f_y(x,y)$

(b) $f(x,y) = y^3 - x^2$

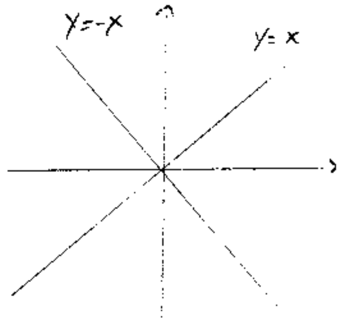
$y^3 - x^2 = 0 \iff y = x^{2/3} \Rightarrow g(x) = x^{2/3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ c'è un'unica funzione che definisca $g(x)$

(c) $f(x,y) = y^4 + x^5 - 3x^2\cos(xy^3) + e^{x^5 y + 7}$?

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 \qquad f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

In questo caso non esiste g def. implicitamente da f.

(e) $f(x,y) = x^2 - y^2 = 0 \iff |y| = |x| \iff y = \pm x$



in questo caso f definisce 2 funzioni $g(x) = \pm x$
$\forall x \in \mathbb{R}$

(f) $\underset{\downarrow}{f(x,y)} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \iff \underset{\downarrow}{y} = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$ 2 funzioni

definita per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad x \in [-1,1]$ definita localmente.

$\boxed{\text{TEOREMA DI DINI} \mid \text{o della funzione implicita}}$

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(D)$, $\exists f_y \in C^0(D)$ e sia $(x_0, y_0) \in D$, D aperto

t.c. $\underline{f(x_0, y_0) = 0}$ e $\underline{f_y(x_0, y_0) \neq 0}$. ($g$ è continua)

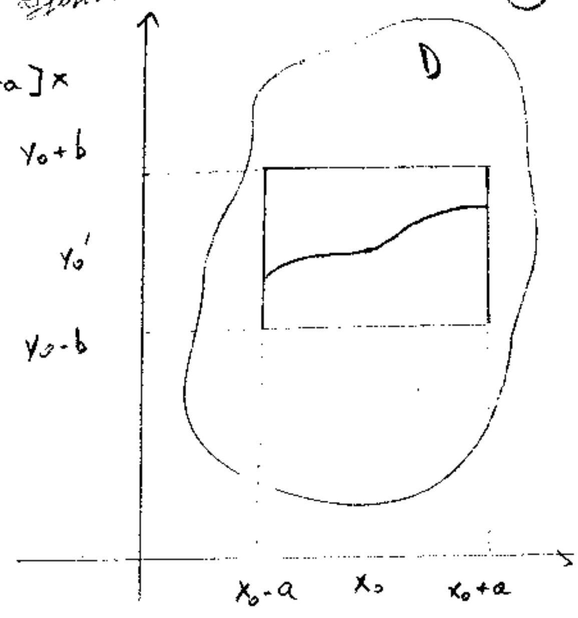
Allora $\exists\, a, b > 0$ e $\exists!\, g : [x_0 - a, x_0 + a] \to [y_0 - b, y_0 + b]$ tali che

(i) $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset D$

2

Cosa che precisamente queste affermazioni?

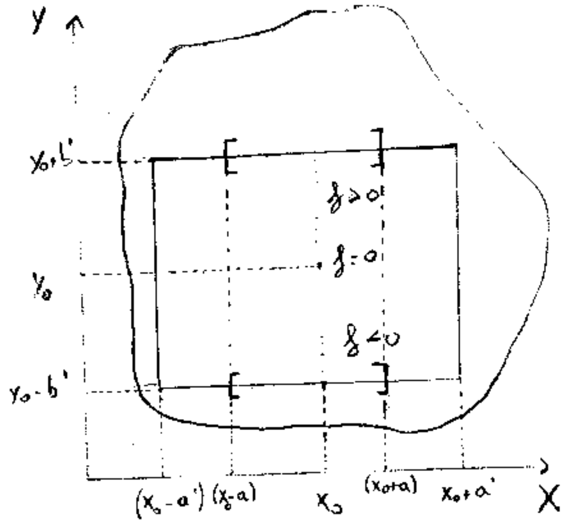
(ii) $\{ (x, g(x)) \mid x \in [x_0-a, x_0+a] \} = \{ (x,y) \in [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b] \mid f(x,y)=0 \}$



Inoltre se $f \in C^1(D) \Rightarrow g \in C^1(x_0-a, x_0+a)$ e

(iii) e $g'(x) = -\dfrac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \quad \forall x \in [x_0-a, x_0+a]$

DIM.	$\exists!\ y=g(x)$ t.c. $f(x,g(x))=0$



Sia $f_y(x_0, y_0) > 0$ f_y è continua in D

permanenza del segno $\rightarrow$ $\Downarrow$

$\exists\ a', b' > 0$ t.c. $\underbrace{[x_0-a', x_0+a'] \times [y_0-b', y_0+b']}_{R'} \subset D$

e $f_y(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in R'$

$\Downarrow$

$\forall x \in [x_0-a', x_0+a']$ la funzione $[y_0-b', y_0+b'] \ni y \mapsto f(x,y)$ è STRETTAMENTE CRESCENTE

$f(x_0,y_0)=0 \rightarrow \Downarrow$

$f(x_0, y_0-b) < 0$ e $f(x_0, y_0+b) > 0$

permanenza del segno (in 1 variabile)

$\downarrow$

Ora fisso y e faccio variare x

f è continua in $D \Longrightarrow \exists\ a \in (0, a') \mid$

$\Swarrow$ $\left.\begin{array}{l} f(x, y_0-b) < 0 \\ f(x, y_0+b) > 0 \end{array}\right\} \forall x \in [x_0-a, x_0+a]$

Dato che $f_y > 0$ per il teorema della permanenza del segno esiste R' in cui $f_y > 0 \Rightarrow$ sempre crescente.

$\forall x \in [x_0-a, x_0+a]$

trovo gli zeri dicendo che la $\exists!\ y=g(x)$ t.c. $f(x,g(x))=0$

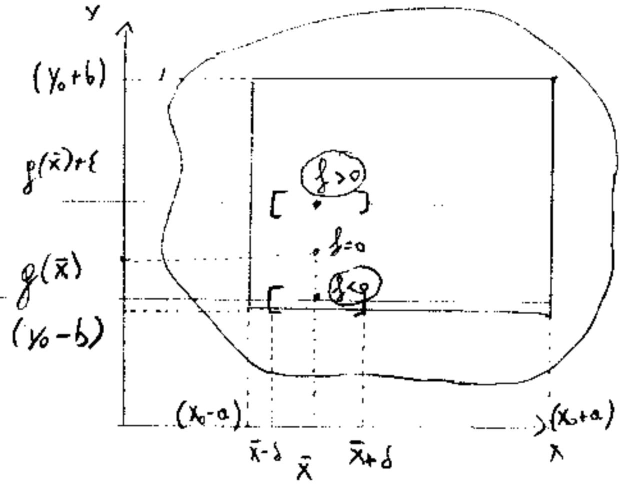
funzione è strettamente monotona

quindi esiste solo un punto in cui $f=0$

Dimostrare ancora che g è continua

g è continua: sia $\bar{x} \in [x_0-a, x_0+a]$ e sia $\varepsilon>0$ t.c.

$[g(\bar x)-\varepsilon, g(\bar x)+\varepsilon] \subset [y_0-b, y_0+b]$



$f(\bar x, g(\bar x))=0 \Rightarrow f(\bar x, g(\bar x)-\varepsilon)<0 \quad f(\bar x, g(\bar x)+\varepsilon)>0$

$\Downarrow$ permanenza del segno

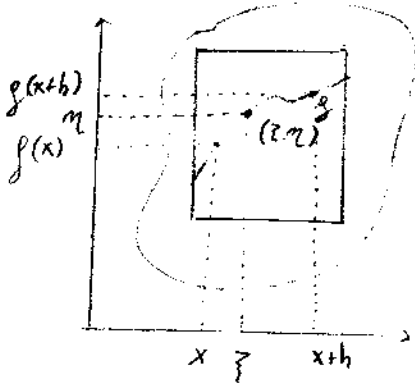
$\exists\, \delta>0$ t.c. $\forall x\, [\bar x-\delta, \bar x+\delta] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar x, g(\bar x)-\varepsilon)<0<f(\bar x, g(\bar x)+\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Per l'unicità di $g(x)$ $\quad g(x) \in [g(x)-\varepsilon, g(x)+\varepsilon] \to g$ è continua in $\bar x$. ■

DIM	(iii)

Sia $f \in C^1(D)$



$f(x+h, g(x+h)) - f(x, \overset{0}{g}(x)) =$

$= \langle \nabla f(\xi,\eta), (x+h, g(x+h)) - (x, g(x)) \rangle =$ Teorema del valor medio

$= f_x(\xi,\eta)\overset{(x+h-x)}{h} - f_y(\xi,\eta)[g(x+h)-g(x)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\dfrac{f_x(\xi,\eta)}{f_y(\xi,\eta)}$ $\to$ faccio il limite per $h\to 0$

$(\xi,\eta)\to(x,g(x))$ per $h\to 0$ $\qquad f\in C^1$

$\Rightarrow \lim\limits_{(\xi,\eta)\to(x,g(x))} -\dfrac{f_x(\xi,\eta)}{f_y(\xi,\eta)} = -\dfrac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}$

3) $f \in C' \Rightarrow g'(x) = -\dfrac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$ Se voglio ricordarmi la formula

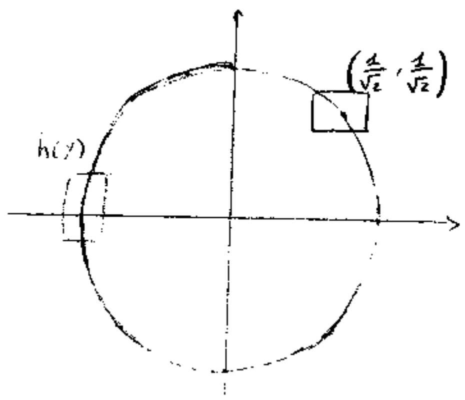
$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I = [x_0 - a, x_0 + a]$

$\Downarrow$ Regola della catena $\quad \frac{d(x)}{dx}$

$0 = \dfrac{d}{dx} f(x, g(x)) = f_x(x, g(x)) \cdot 1 + f_y(x, g(x)) g'(x)$

$f \in C^k(D) \Rightarrow f_x, f_y \in C^{k-1}(D) \Rightarrow g' \in C^{k-1}(I) \Rightarrow g \in C^k(I)$

Esempio:

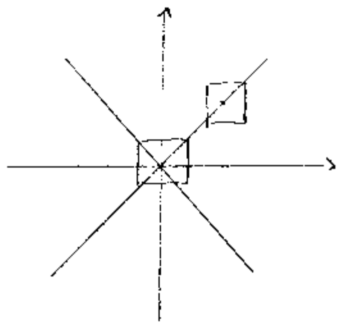


(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \qquad f_y(x,y) = 2y \neq 0 \iff y \neq 0$

$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

nel punto $(-1, 0)$ $\quad f_x(-1, 0) = -2 \neq 0$

$x = h(y) = -\sqrt{1 - y^2}$



(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x, -2y) \neq (0,0)$

$\forall (x,y) \neq (0,0)$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$ infatti non si può esplicitare né x in $f(y)$ né y in $f(x)$ in modo unico.

(c) $f(x,y) = y^3 - x^2$

$\nabla f(x,y) = (-2x, 3y^2) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow$ in $(0,0)$ l'Ip di Dini non sono soddisfatte.

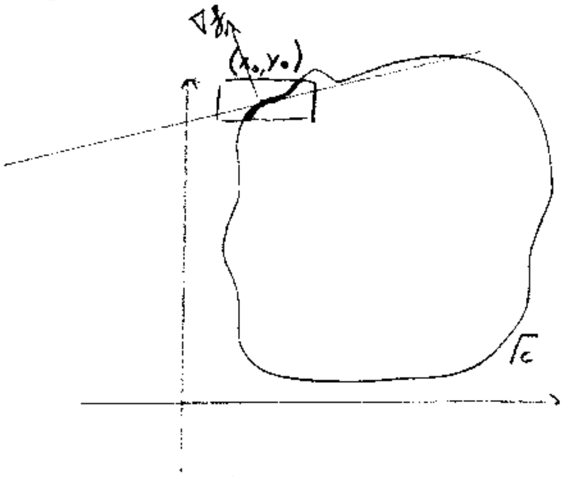
Però posso trovare una funzione g definita implicitamente $\Rightarrow y = x^{2/3} = g(x)$

Def	INSIEME DI LIVELLO A QUOTA

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$

L'insieme di livello a quota (o linea) $c \in \mathbb{R}$ di f è $\Gamma_c = \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\} =$

$= \{(x,y) \in D \mid f(x,y) - c = 0\}$



Un punto $(x_0,y_0) \in \Gamma_c$ si dice regolare se

$\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$

$\Downarrow$

Sia $f_y(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow$ POSSO USARE DINI $\Rightarrow \exists g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x,g(x)) - c = 0 \quad \forall x \in I$

La retta tangente a Γ_c in (x_0,y_0) è $y = y_0 + g'(x_0)(x-x_0) \overset{\text{DINI}}{=}$

$$= y_0 - \frac{f_x(x_0, \overset{y_0}{g(x_0)})}{f_y(x_0, \underset{y_0}{g(x_0)})}(x-x_0) = y_0 - \frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$ EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE A Γ_c IN UN p.to $(x_0,y_0) \in \Gamma_c$ Regolare

$\Updownarrow$

$\langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0) \rangle = 0 \Rightarrow$ il gradiente è ortogonale alle linee di livello (nei punti regolari)

Soluzione Esercizi

ESERCIZI

$f(x,y) = xe^y - ye^x$ · Hp Dini in $(0,0)$?

$\Updownarrow$

$\exists\, g: I \subset \mathbb{R}$ t.c. $\qquad f(0,0)=0 \quad f_y(0,0) \neq 0$?

$g(0)=0$ e $\qquad \Leftarrow \quad f_y(x,y) = xe^y - e^x \qquad f_y(0,0) = -1 \neq 0$

$f(x,g(x)) = xe^{g(x)} - g(x)e^x = 0$

$\forall x \in I \qquad \Rightarrow$ Come calcolo le sue derivate? Dini

Sviluppo di McLaurin al secondo ordine?

$g(x) = \underset{\downarrow\, 0}{g(0)} + g'(0)\cdot x + \frac{1}{2} g''(0) x^2 + o(x^2)$

Dini

$$g'(x) = -\frac{f_x(0,g(0))}{f_y(0,g(0))} = -\frac{f_x(0,0)}{\underbrace{f_y(0,0)}_{-1}} \longrightarrow f_x = e^y - ye^x \rightarrow \text{in } (0,0) = 1$$

$$g'(x) = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$g''(x) = \left(-\frac{f_x(0,g(0))}{f_y(0,g(0))}\right)' \Rightarrow \quad f_x(x,g(x)) + f_y(x,g(x))\cdot g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow e^{g(x)} - g(x)e^x + \left(xe^{g(x)} - e^x\right)g'(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

$$e^{g(x)}\cdot g'(x) - g'(x)e^x - g(x)e^x + \left(e^{g(x)} + xe^{g(x)}g'(x) - e^x\right)g'(x) + \left(xe^{g(x)} - e^x\right)g''(x) = 0$$

In $x=0 \quad g(0)=0 \qquad \Rightarrow \qquad +g''(0) = 0$

$$g(x) = 0 + 1\cdot x + 0 + o(x^2)$$

ESERCIZI

$f(x,y) = xy^2 + y + \sin(xy) + 3(e^x - 1)$

$f(0,0) = 0 \qquad f_y(x,y) = 2xy + 1 + x\cos(xy) \qquad f_y(0,0) = 1 \neq 0$ Posso applicare Dini

$\Rightarrow \exists\, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $g(0) = 0$ e $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I$

Hopital vedere condizioni. $g \in C^\infty \to$ derivo sopra e sotto

a) $\lim_{x\to 0} \frac{g(x) + 3x}{x} = \frac{0}{0} \overset{\downarrow}{=} \lim_{x \to 0} g'(x) + 3 = g'(0) + 3$

$g'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} \to f_x(x,y) = y^2 + y\cos(xy) + 3e^x \Rightarrow$ in $(0,0) = 3$

$\Rightarrow g'(0) = 0$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 3x}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{Hopital}}{=} \frac{g'(x) + 3}{2x} = \frac{0}{0} \overset{\text{Hopital}}{=} \frac{g''(x)}{2} = \frac{1}{2} g''(0)$

$0 = f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x))\, g'(x) = g(x)^2 + g(x)\cos(x g(x)) + 3e^x +$

$+ \left[2x g(x) + 1 + x\cos(x g(x))\right] g'(x) \to$ derivo tutto $\Rightarrow g''(0) = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{g''(0)}{2} = 3 \quad \blacksquare$

$f(x,y) = \sin(xy) + e^{2x} - \cos y - 2x + y \qquad f(0,0) = 0$

$\exists\, g : \ldots$

$f_y(x,y) = x\cos(xy) + \sin y + 1$

$f_y(0,0) = 1 \neq 0$ applicabile Dini

$g'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = 0 \qquad f_x = y\cos(xy) + 2e^{2x} - 2$ in $(0,0) = 0$

PERCHÉ?

Solito procedimento $\Rightarrow g''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ [$x = 0$ MASSIMO RELATIVO PER g]

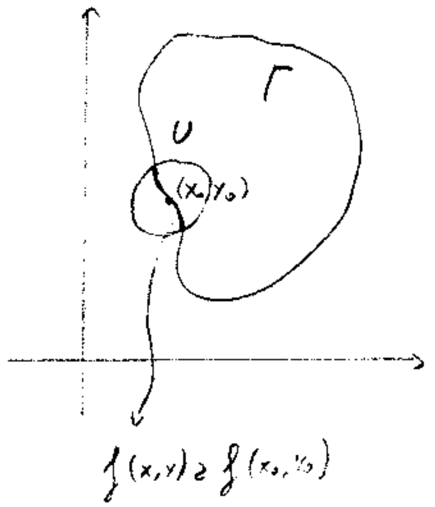
2|

Def. | Punti Estremali Vincolati

$f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D aperto $\quad \Gamma = \{(x,y) \in D \mid g(x,y) = 0\}$

Un punto $(x_0, y_0) \in \Gamma$ si dice un minimo (massimo) per f vincolato a Γ se $\exists$ U intorno di (x_0, y_0) t.c.

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \qquad \forall (x,y) \in U \cap \Gamma$$
$$\left(f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \right)$$



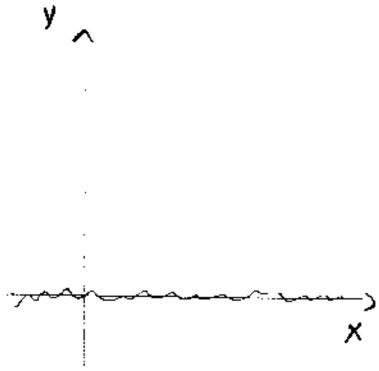
(x_0, y_0) è min/max di f

$\Downarrow$ $\qquad\qquad \cancel{\Uparrow}$

(x_0, y_0) è min/max vincolato per f.

<u>Esempio:</u>

$f(x,y) = x^2 + y$, $g(x,y) = y$ $\quad \Gamma = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ asse x



sempre positiva

$f(x,0) = x^2 \Rightarrow (0,0)$ <u>min vincolato a Γ</u>

Poiché $f(x,0) = x^2 \geq 0 = f(0,0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\nabla f(x,y) = (2x, 1) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,1) \neq 0 \Rightarrow$ <u>non è un punto stazionario</u> $(0,0)$.

<u>non è minimo.</u>

$\Rightarrow$ non vale la freccia all'inverso

Esempi:

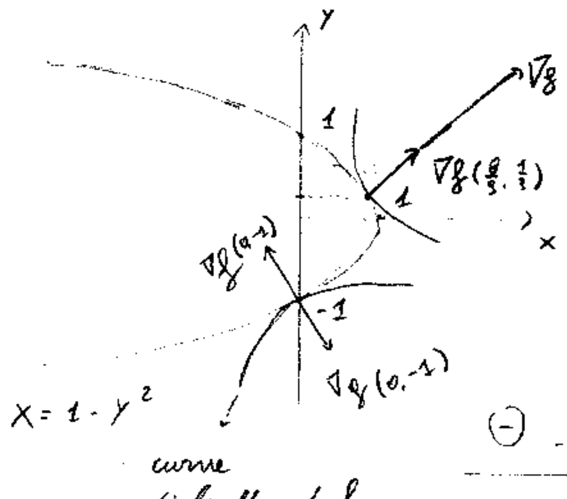
ESEMPI

Trovare:

(a) $f(x,y) = xy - y^2 + 3$. max/min di f vincolati a $\Gamma = \{(x,y) \mid x + y^2 - 1 = 0\}$

$g(x,y) = x + y^2 - 1 \rightsquigarrow x = -y^2 + 1$

Basta studiare la funzione $\underline{h(y) = f(1-y^2, y)}$



$$(1-y^2)y - y^2 + 3 = \underline{-y^3 - y^2 + y + 3}$$

$$h'(y) = -3y^2 - 2y + 1 = 0 \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{-3} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

⊖ -1 ⊕ $\frac{1}{3}$ ⊖

↘ ↗ ↘

$\left.\begin{array}{l}(0,-1) \text{ min} \\ (\frac{8}{9}, \frac{1}{3}) \text{ max}\end{array}\right\}$ per f vincolata a Γ

$$\nabla f(x,y) = (y, x - 2y) \qquad \nabla f(0,-1) = (-1, 2) \neq 0$$

$$\nabla f(\tfrac{8}{9}, \tfrac{1}{3}) = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{9}) \neq 0$$ non sono punti stazionari

$$\nabla g(x,y) = (1, 2y) \qquad \nabla g(0,-1) = (1,-2) = -\nabla f(0,-1)$$

$$\nabla g(\tfrac{8}{9}, \tfrac{1}{3}) = (1, \tfrac{2}{3}) = 3\nabla f(\tfrac{8}{9}, \tfrac{1}{3})$$ sono paralleli

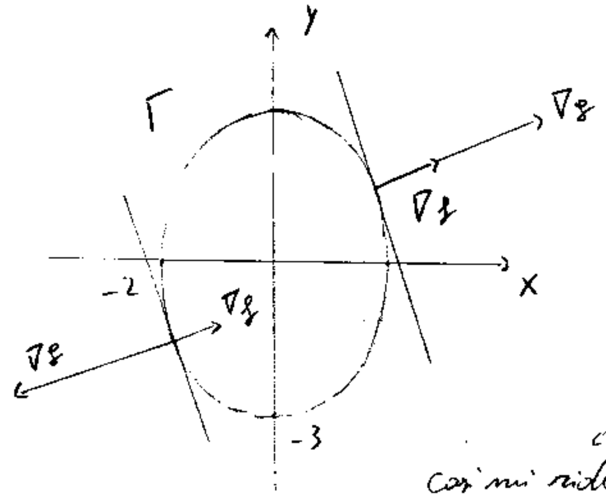
3 ESEMPI (F1)

(b) $f(x,y) = 3x + 4y - 1$ max/min di f vincolati a $\Gamma = \{(x,y) \mid 9x^2+4y^2-36=0\}$

$g(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 36$

$\Updownarrow$

EQ ELLISSE: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$



Parametrizzazione di Γ

$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 3\sin(t) \end{cases}$ <=> Γ è il sostegno della curva $\gamma(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$ $t \in [0, 2\pi]$

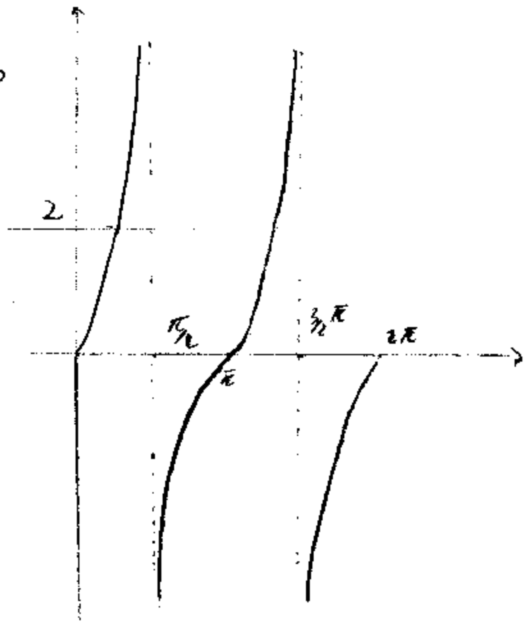
così mi riduco ad una variabile

basta studiare $h(t) = f(\gamma(t)) = f(2\cos(t), 3\sin(t)) =$

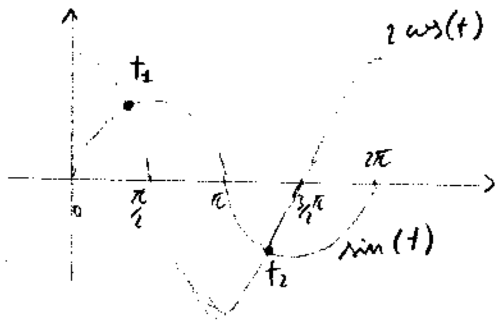
$= 6\cos(t) + 12\sin(t) - 1$

Cosa è successo?

$h'(t) = -6\sin(t) + 12\cos(t) = 0$ $\quad tg(t) = 2$



$h'(t) > 0 \iff 2\cos(t) > \sin(t)$



$\begin{bmatrix} t_1 = \operatorname{arctg} 2 \\ t_2 = t_1 + \pi \end{bmatrix}$

	0		t_1		π		t_2		2π
h'									
h		$\nearrow$	max		$\searrow$ min			$\nearrow$	

$g(x,y) = 0$

$(x,y) = (2\cos(t), \sin(t))$ soddisfa

$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ \frac{y}{x} = \frac{3\sin(t_1)}{2\cos(t_1)} = \frac{3}{2} tg(t_1) = 3 \Rightarrow y = 3x \Rightarrow y^2 = 9x^2 \end{cases}$

$9x^2 + 36x^2 = 45x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{36}{45}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{6}{\sqrt5}\right)$ max vincolato $\qquad \nabla f(x,y) = (3,4)$

$\left(-\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{6}{\sqrt5}\right)$ min vincolato $\qquad \nabla g(x,y) = (18x, 8y)$

$$\nabla g\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}, \pm\frac{6}{\sqrt5}\right) = \left(\pm\frac{36}{\sqrt5}, \pm\frac{48}{\sqrt5}\right) = \pm\frac{12}{\sqrt5}\nabla f\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{6}{\sqrt5}\right)$$

TEO	DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

(caso $n=2$)

$D \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di Classe C^1

$\Gamma := \{(x,y) \in D \mid g(x,y) = 0\}$ $\qquad (x_0, y_0) \in \Gamma$ punto estremale per f vincolato a Γ e punto regolare di Γ

$\Updownarrow$

Allora $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ (DETTO MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE) $\qquad$ (def. $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$)

t.c.

$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0) \implies (x_0, y_0, \lambda)$ è un punto stazionario per la funzione:

$$\nabla L(x,y,\lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, g) \Leftarrow L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

$\Downarrow$

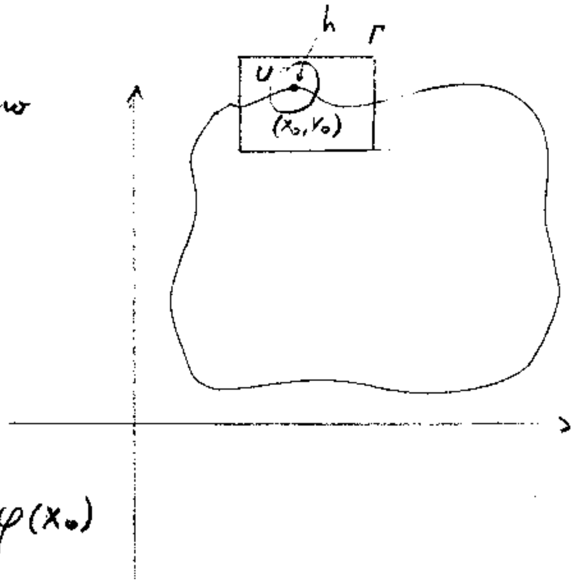
$$\begin{cases} \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\underline{\text{dim.}}: \quad \nabla g(x_0,y_0) \neq 0}$

Sia $g_y(x_0,y_0) \neq 0 \qquad g(x_0,y_0)=0 \qquad ((x_0,y_0) \in \Gamma)$

$\Downarrow \to$ Dini

$\exists\, h: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c. $h(x_0)=y_0$ e $g(x,h(x))=0 \quad \forall x \in I$



Sia (x_0,y_0) minimo vincolato per f e definiamo

$$\varphi(x) = f(x,h(x))$$

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $|x-x_0|<\delta \Rightarrow (x,h(x)) \in U \cap \Gamma$

$\Downarrow$ ⟶ perché?

$$\varphi(x) = f(x,h(x)) \geq f(x_0,y_0) = f(x_0,h(x_0)) = \varphi(x_0)$$

$\Downarrow$

$x = x_0$ è min per φ

perché? $\Downarrow$

$$0 = \varphi'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x,h(x))\Big|_{x=x_0} = \underset{\text{Regola della}}{\text{Catena}} = f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)\,h'(x_0)$$

$$(\text{Dini}) = f_x(x_0,y_0) - f_y(x_0,y_0) \cdot \frac{g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f_x(x_0,y_0)\,g_y(x_0,y_0) - f_y(x_0,y_0)\,g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)} = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & g_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$$

ESEMPI

TEOREMA | DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$f, g \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \{(x,y) \in D \mid g(x,y) = 0\}$ (vincolo)

$(x_0,y_0) \in \Gamma$ regolare $(\nabla g(x_0,y_0) \neq 0)$ ed estremale per f vincolato a Γ

$\Downarrow$

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{R} \mid \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0) \iff \begin{cases} f_x(x_0,y_0) - \lambda g_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) - \lambda g_y(x_0,y_0) = 0 \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

3 EQUAZIONI IN 3 INCOGNITE

Esempi:

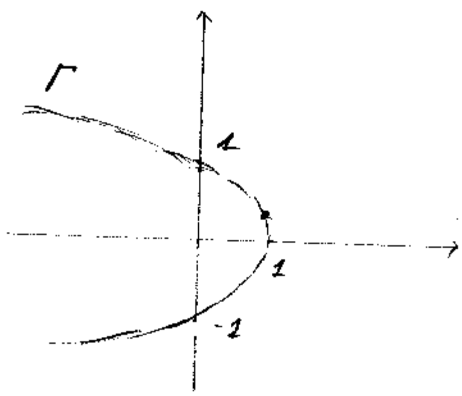
(a) min/max di $f(x,y) = xy - y^3 + 3$ su $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x + y^2 - 1 = 0}_{g(x,y)}\}$

1) $\nabla g(x,y) = (1, 2y) \neq (0,0) \Rightarrow$ tutti i punti di Γ sono regolari.

2)
$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_y(x,y) = y - \lambda = 0 & \Rightarrow \lambda = y \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = x - 2y - 2\lambda y = 0 & \Rightarrow x - 2y - 2y^2 = 0 \iff x = 2y + 2y^2 \\ g(x,y) = 0 = x + y^2 - 1 = 0 & \Rightarrow 3y^2 + 2y - 1 = 0 \quad y = \begin{cases} 1/3 \\ -1 \end{cases} \end{cases}$$

Soluzioni: $(0,-1)$, $\left(\frac{8}{9}, \frac{1}{3}\right)$

3)



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,-1) = -2 \neq 0 \\ g(0,-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Hp } \underline{\text{Dini}} \text{ soddisfatte}$$

$\Downarrow$

$\exists\ y = h(x)$ definita in un intorno di $x = 0$ t.c. $g(x, h(x)) = 0$

basta studiare il segno della derivata $\frac{d}{dx} f(x, h(x)) =$ regola della catena

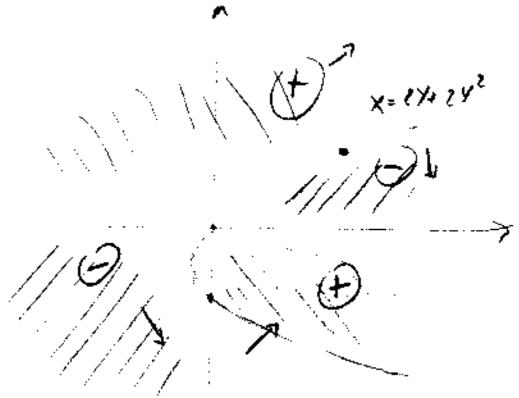
$$= f_x(x, h(x)) + f_y(x, h(x)) \cdot h'(x) \overset{\text{Dini}}{=} f_x(x, h(x)) - f_y(x, h(x)) \frac{f_x(x, h(x))}{f_y(x, h(x))} =$$

$$= \left(y - (x - 2y) \frac{1}{2y} \right) \Big|_{y = h(x)} = \frac{2y^2 - x + 2y}{2y} \Big|_{y = h(x)}$$

$2y^2 - x + 2y > 0 \iff x < 2y + 2y^2 = 2y(1+y)$

$y > 0$

? Disegno questa parabola



$\Rightarrow$ Punto di minimo.

$\frac{d}{dx} f(x, h(x)) < 0$ se $x < 0$

$\frac{d}{dx} f(x, h(x)) > 0$ se $x > 0$?

$\Downarrow$

$(0, -1)$ è minimo di f vincolata a Γ

$\frac{d}{dx} f(x, h(x)) < 0$ se $x > \frac{8}{9}$ $\quad\left(\frac{8}{9}, \frac{1}{3}\right)$ è un massimo vincolato

$\frac{d}{dx} f(x, h(x)) > 0$ se $x < \frac{8}{9}$

ESEMPI

21

(b) min/max di $f(x,y) = 3x + 6y - 1$ vincolati a $\Gamma = \{(x,y) \mid \underbrace{9x^2 + 4y^2 - 36 = 0}_{g(x,y)}\}$

$\nabla g(x,y) = (18x, 8y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0) \notin \Gamma$

$\Rightarrow$ tutti i punti di Γ sono regolari

TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE.

$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 = 3 - 18\lambda x \Rightarrow x = \dfrac{1}{6\lambda} \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0 = 6 - 8\lambda y \Rightarrow y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ g(x,y) = 0 = 9x^2 + 4y^2 - 36 \Rightarrow \dfrac{9}{36}\dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} - 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \cdot\ x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cdot\ y = \pm \dfrac{6}{\sqrt{5}} \\ \quad\Uparrow \\ \cdot\ \lambda = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{12} \end{array}$$

Soluzioni: $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$

Γ è chiuso e limitato $\underset{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow}$ $\exists \max_\Gamma f, \min_\Gamma f$

$$\underbrace{f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right)}_{\max \text{ su } \Gamma} > \underbrace{f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right)}_{\min \text{ su } \Gamma}$$

Ora facciamo il caso in cui il metodo dei moltiplicatori è l'unica possibilità. Fino ad ora potevamo usare più metodi.

LEZIONE ⇒

ESEMPI

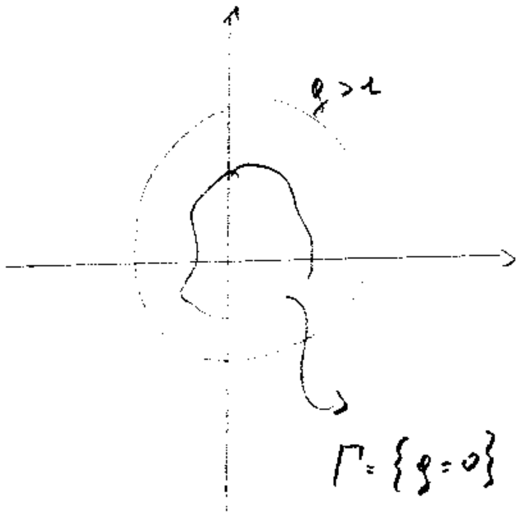
3| $\Gamma = \{(x,y) \mid x^4+y^4+3xy-2=0\}$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} x^4+y^4+3xy-2 = +\infty \overset{C.P.}{=} \rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta) + 3\rho^2 \sin\cos - 2$$

$$\geq m\rho^4 - 3\rho^2 - 2 \underset{\rho\to\infty}{\to} \infty$$

Per def. di limite.   numero qualunque positivo.

$\exists\, R>0 \mid \|(x,y)\| > R \Rightarrow g(x,y) > 1$

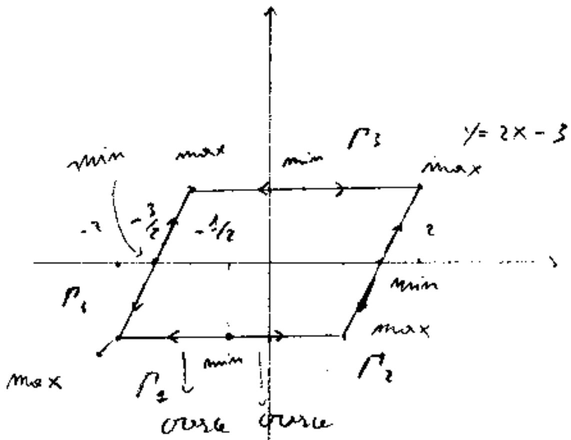


$\Gamma \subset B_R(0,0) \Rightarrow \Gamma$ è limitato.

(d) max/min di $f(x,y) = x^2+2y-xy+3$ sul parallelogramma di vertici:

$(-2,-1), (1,-1), (2,1), (-1,1)$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}$ non sono punti regolari di Γ



$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

$\Gamma_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\leq x\leq 1,\ y=-1\}$

$$\frac{\partial f}{dx}(x,-1) = \frac{d}{dx}(x^2+x+5) = 2x+1 \overset{=0}{\iff} x=-\frac{1}{2}$$

$\Gamma_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x\leq 2,\ y=2x-3\}$

$\Gamma_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq x\leq 2 \quad y=1\}$

$\Gamma_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\leq x\leq -1 \quad y=2x+3\}$

$$\frac{\partial f}{dx}(x,2x+3) = \frac{d}{dx}\left[x^2+2(2x+3)-x(2x+3)+3\right]=0$$

$$\ldots \iff x=-\frac{3}{2}$$

Problemi tipici:

- Dire se l'equazione $f(x,y,z)=0$ definisce implicitamente una funzione $z=g(x,y)$ t.c. $f(x,y,g(x,y))=0 \quad \forall (x,y)$
- Dire se il sistema $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$

Definisce implicitamente 2 funzioni $x=x(z)$, $y=y(z)$ t.c.

$$\begin{cases} f(x(z),y(z),z)=0 \\ g(x(z),y(z),z)=0 \end{cases} \forall z \Rightarrow \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=t \end{cases} \text{ è una curva parametrica in } \mathbb{R}^3$$

$\boxed{\text{DEF.}}$

$D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$ aperti, $f: D \times E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ $\quad (x,y) \in D \times E$

$x = x_1 \dots x_n$
$y = y_1 \dots y_m$

Definisco
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} = \text{Jacobiano della funzione}$$
$y \in E \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}^m$

Teorema di Dini caso generale

$D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$ aperti, $m < n$, $f : D \times E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ continua e t.c.

$\exists \dfrac{\partial f_i}{\partial y_k} \in C^0(D \times E)$ Sia $(x_0, y_0) \in D \times E$ t.c.

mi so che deve essere $=0$

$f(x_0, y_0) \overset{=0}{\neq 0}$. $\det\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$

. Allora $\exists\, r, s > 0$ t.c. $B_r(x_0) \times B_s(y_0) \subset D \times E$ ed $\exists!\, g : B_r(x_0) \to B_s(y_0)$ continua

t.c. $\{(x,y) \in B_r(x_0) \times B_s(y_0) \mid f(x,y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in B_r(x_0)\}$

. Inoltre se $f \in C^1(D \times E)$ allora $g \in C^1(B_r(x_0))$ e

$$\underbrace{J_g(x)}_{m \times n} = -\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1}}_{m \times m}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\right)}_{m \times n}$$

Esercizi:

1) Trovare punti della curva di eq. $4x^2 + 2y^2 - 5x = 0$ che sono alla min/max distanza dall'origine

2) Trovare max/min di $f(x,y) = x^2 + y$ su $\Gamma = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0\}$

3) Data $f(x,y,\overset{g(x,y)}{z}) = e^z + x^2 y^2 z - e^{xy} + x^4 - y^4 = 0$ a) Verificare che f definisce implicitamente una funzione $z = g(x,y)$ in un intorno di $(0,0)$ t.c. $g(0,0) = 0$

b) Verificare che $(0,0)$ è un punto di sella (usare Dini generalizzato)

1 | 13/10/19

$f: D \times E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e t.c. $\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \in C^0(D \times E)$, $(x_0, y_0) \in D \times E$ t.c.

$f(x_0, y_0) = 0$ e $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists$ U, V intorno di x_0, y_0 t.c. $U \times V \subset D \times E$

e $\exists$ $g: U \to V$ continua t.c. $\{(x,y) \in U \times V \mid f(x,y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$

Inoltre se $f \in C^1(D \times E) \Rightarrow g \in C^1(U)$ $\quad J_g(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$

$f \in C^k(D \times E) \Rightarrow g \in C^k(U)$

variabili dipendenti $\Rightarrow$ che vengono determinate dalle variabili n

$\boxed{m = 1 \quad n = 2}$ se $\exists$ (x_0, y_0, z_0) t.c. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

quindi f è a tre variabili

$\Downarrow$

$\exists$ $z = g(x,y)$ definita in un intorno (x_0, y_0) t.c. $f(x, y, g(x,y)) = 0$

cioè g è definita implicitamente dall'equazione $f(x,y,z) = 0$

variabile dipendente

$\boxed{m = 2 \quad n = 1}$ se $\exists (x_0, y_0, z_0)$ t.c. $\begin{cases} f_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$ e

variabile che esplicita

$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists$ $x = x(z)$, $y = y(z)$ definite in un intorno di z_0

t.c. $\begin{cases} f_1(x(z), y(z), z) = 0 \\ f_2(x(z), y(z), z) = 0 \end{cases}$

$$0=\frac{d}{dz} f_1(x(z),y(z),z)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x(z),y(z),z)\,x'(z)+\frac{\partial f_1}{\partial y}(\ )\cdot y'(z)+\frac{\partial f_1}{\partial z}(\ )$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\cdot x'+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\cdot y'=-\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\cdot x'+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\cdot y'=-\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\end{cases} \Longrightarrow \quad x'(z)=\left.\frac{\det\begin{pmatrix}-\frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ -\frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}}\right|_{(x(z),y(z),z)}$$

$$\Downarrow$$

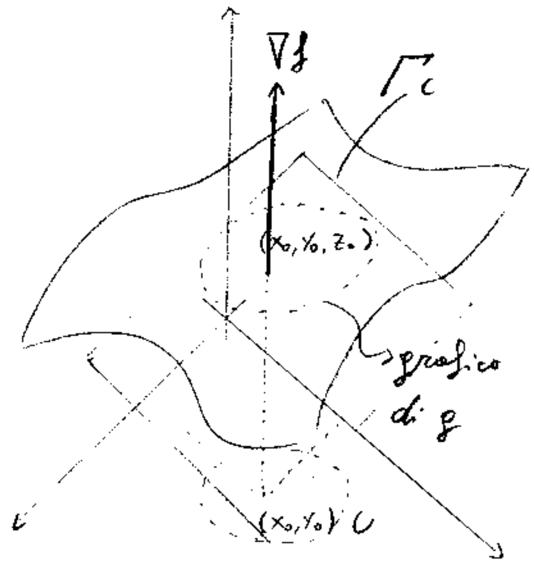
$$y'(z)=\left.\frac{\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial z}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}}\right|_{(x(z),y(z),z)}$$

$f: D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ di Classe C^1 $\qquad \Gamma_c=\{(x,y,z)\in D \mid f(x,y,z)=c\}$

Superficie di livello c di f.

$(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma_c$ si dice un punto regolare

se $\nabla f(x_0,y_0,z_0)\neq 0$



Sia $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

$$\Downarrow$$

Posso Applicare Dini

$$\Downarrow$$

$\exists\, g: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ di Classe C^1 $\quad$ U intorno di (x_0,y_0) t.c. Γ nell'intorno di (x_0,y_0,z_0) è il grafico di g.

2| Piano tangente al grafico di g in (x_0, y_0, z_0)

$$z = z_0 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) \overset{\text{DINI}}{=}$$

$$= z_0 - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial x}()(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0) = 0 \right]$$

EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE ALLA SUPERFICIE DI LIVELLO Γ_c in (x_0, y_0, z_0) (regolare)

$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = 0 \Rightarrow \nabla f(x_0,y_0,z_0) \text{ è ortogonale a } \Gamma_c$$

Def.

$[m < n]$

$g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di Classe C^1 $\quad \Gamma = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ un punto $x \in \Gamma$ si dice regolare se $\operatorname{rg} \underset{m \times n}{J_g(x)} = m \iff \nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \dots \nabla g_m(x)$ sono linearmente indipendenti

Def: Spazio tangente e normale a Γ

g, Γ e x come sopra $\quad T_x \Gamma := \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, t.c. $\gamma(t) \in \Gamma \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v \}$

cos'è

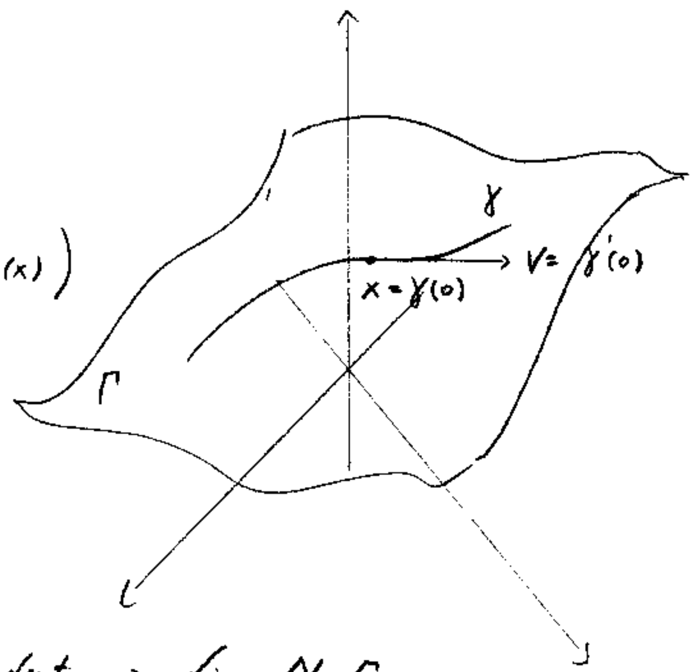
Si dice lo spazio tangente a Γ in x

$$N_x\Gamma = \langle \nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \dots, \nabla g_m(x) \rangle =$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x) \;\middle|\; \lambda_j \in \mathbb{R},\ j = 1 \dots m \right\}$$

(Spazio vettoriale generato da $\nabla g_1(x) \dots \nabla g_m(x)$)

Si dice lo spazio normale (o ortogonale) a Γ in x



$\nabla g_1(x) \dots \nabla g_m(x)$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \dim N_x\Gamma = m$

Proposizione $\quad T_x\Gamma = (N_x\Gamma)^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_j(x), v \rangle = 0 \ \forall j = 1 \dots m \}$

Dim.

$T_x\Gamma \overset{?}{\subset} (N_x\Gamma)^\perp$, sia $v \in T_x\Gamma \Rightarrow \exists\, \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ come nella definizione di $T_x\Gamma$, t.c. $\gamma'(0) = v \Rightarrow \overset{*}{g}(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$(\gamma(t) \in \Gamma \ \forall t)$

$$0 = \frac{d}{dt} g_j(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \overset{\text{Regola della Catena}}{=} \langle \nabla g_j(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = \langle \nabla g_j(x), v \rangle \quad \forall j = 1 \dots m \Rightarrow$$

$\Rightarrow v \in (N_x\Gamma)^\perp$

3| $\dim T_x\Gamma \le \dim (N_x\Gamma)^\perp = \overset{\text{dimensione spazio}}{n} - m := p$ (43)

Basta dimostrare che $\dim T_x\Gamma = p$

$rg\, J_g(x) = m \Rightarrow J_g(x)$ ha un minore $m\times m$ con $\det \neq 0$ sia

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{p+1}} & & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{APPLICO DINI} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Si possono esplicitare $(x_{p+1}, \dots, x_n)$ in funzione di $(x_1 \dots x_p)$,

cioè $\exists\, h: U \to \mathbb{R}^m$ U intorno di $(x_1 \dots x_p)$ h di classe C^1 t.c.

$h(x_1 \dots x_p) = (x_{p+1} \dots x_n)$ e $g'(x_1' \dots x_p', h(x_1' \dots x_p')) = 0$

$\forall (x_1 \dots x_p) \in U$

Definiamo:

$\gamma_j(t) := (x_1, x_2, \dots x_j + t, x_{j+1}, \dots x_p, h(x_1, \dots x_j + t, \dots x_p))$ $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$j = 1 \dots p$

$g(\gamma_j(t)) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \gamma_j(t) \in \Gamma \ \forall t \quad \gamma_j(0) = (x_1 \dots x_p, h(x_1 \dots x_p)) = x$

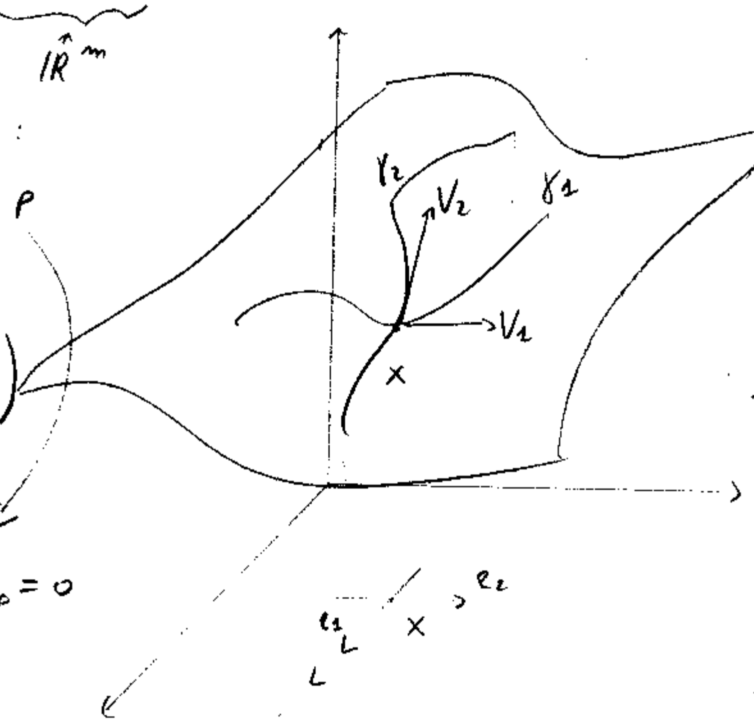
$T_x \Gamma \ni V_j := \gamma_j'(0) = \Big(0, 0, \dots \overset{\downarrow}{1}, 0, 0, \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1 \dots x_p)}_{\mathbb{R}^m}\Big) \quad p = 2 \quad m = 1$

$V_1 \dots V_p$ sono linearmente indipendenti:

$\Rightarrow \dim T_x \Gamma \geq p$

$j = 1 \dots p$

$$0 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j V_j = \Big(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1 \dots x_p)\Big)$$



$\Rightarrow T_x \Gamma = (N_x \Gamma)^{\perp} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \dots = \lambda_p = 0$

TEO MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE, CASO GENERALE

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m < n)$ di classe C^1,

$\Gamma = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ $\quad x_0 \in \Gamma$ punto estremale per f

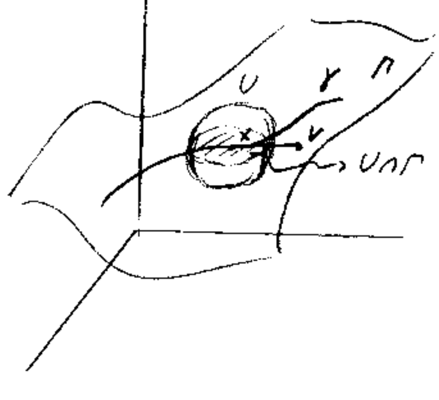
vincolato a Γ e punto regolare di Γ. Allora $\exists\, \lambda_1 \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x_0)$$

DIM: Sia $x_0 \in \Gamma$ minimo vincolato $\overset{\text{def.}}{\Rightarrow} \exists\, U$ intorno di x_0 t.c.

$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U \cap \Gamma$

Sia $v \in T_x \Gamma$ e sia γ una curva tracciata in Γ t.c. $\gamma'(0) = v$



4] Definiamo $\varphi(t) := f(\gamma(t))$ $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Per $|t|$ sufficientemente piccolo $\gamma(t) \in V \cap \Gamma$

$\Downarrow$

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)) \geq \underset{\varphi(0)}{\underset{\parallel}{f(\gamma(0))}} = f(x_0)$$

$t=0$ è un minimo per φ

$\Downarrow$ ← FERMAT 1 VARIABILE

$$0 = \varphi'(0) = \langle \nabla f(\underset{\gamma(0)}{x_0}), \underset{\gamma'(0)}{v} \rangle$$

$$\nabla f(x_0) \in (T_{x_0}\Gamma)^{\perp} = (N_{x_0}\Gamma)^{\perp\perp} = N_{x_0}\Gamma$$

$\Downarrow$

$$\nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x_0)$$

max/min di f vincolati a Γ vanno cercati tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}(x) = 0 & k = 1 \dots n \\ g_j(x) = 0 & j = 1 \dots m \end{cases}$$

Cioè tra i punti stazionari della funzione

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

$$(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

ESERCIZI

Esercizi: (2) del 21/10

1) MAX/MIN di $f(x,y) = x^2 + y$ su $\Gamma := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$

Γ è chiuso e limitato quindi è compatto. <u>USO WEIERSTRASS.</u>

$g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \rightarrow \nabla g = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9} \right) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0) \notin \Gamma$

Tutti i punti di Γ sono regolari $\Rightarrow$ <u>USO IL METODO DI LAGRANGE.</u>

$$\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda g(x,y) \Rightarrow \begin{matrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \mathcal{L}_\lambda \end{matrix} \begin{cases} 2x - \lambda \frac{x}{2} = 0 \\ 1 - \frac{2\lambda y}{9} = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 3 \end{cases} ; \begin{cases} \lambda = 4 \\ y = \frac{9}{8} \\ x = \pm \frac{\sqrt{55}}{4} \end{cases}$$

Soluzioni: $(0, \pm 3)$ $\left(\pm \frac{\sqrt{55}}{4}, \frac{9}{8}\right) \Rightarrow f(0, \pm 3) = \pm 3$ $\quad f\left(\pm \frac{\sqrt{55}}{4}, \frac{9}{8}\right) = \frac{55}{16} + \frac{9}{8} > 3$

$(0,-3)$ MIN ASSOLUTO $\qquad$ MAX. ASSOLUTO

(1) del 21/10

---

2) MAX/MIN distanza da $(0,0)$ della curva $g = 4x^2 + 2y^2 - 5x = 0$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Vediamo se Γ è compatto: $\lim_{(x,y) \to \infty} 4x^2 + 2y^2 - 5x \overset{C.P.}{=} \lim_{\rho \to \infty} \rho^2 (4\cos^2\theta + 2\sin^2\theta) - 5\rho \sin\theta \geq$

$\geq m\rho^2 - 5\rho \rightarrow \infty$ per $\rho \to \infty$ $\rightarrow \Gamma$ è compatto $\rightarrow \exists$ min/max di f.

M. di LAGRANGE: $\nabla g(x,y) = (8x - 5, 4y) = (0,0) \iff (x,y) = \left(\frac{5}{8}, 0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow g\left(\frac{5}{8}, 0\right) = -\frac{25}{16} \neq 0 \Rightarrow$ Tutti i punti di Γ sono regolari

$$\begin{matrix} \mathcal{L}_x \\ \mathcal{L}_y \\ \mathcal{L}_\lambda \end{matrix} \begin{cases} 2x - \lambda(8x-5) = 0 \\ 2y - 4\lambda y = 0 \\ 4x^2 + 2y^2 - 5x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \frac{5}{4} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (0,0) \text{ e } \left(\frac{5}{4}, 0\right) \\ \Downarrow \\ f(0,0) = 0 \text{ min} \end{matrix} \Rightarrow f\left(\frac{5}{4}, 0\right) = \frac{25}{16} \text{ MAX}$$

2 | 24/10/19

ESERCIZI (71)

3) del 21/10 (3)

$$f(x,y,z) = e^z + x^2y^2z - e^{xy} + x^4 - y^4$$

a) Verificare che f definisce implicitamente una funzione $g(x,y)$ in un intorno di $(0,0)$ t.c. $g(0,0)=0$

b) Verificare che $(0,0)$ è punto di sella per g

a) $\left.\begin{array}{l} f(0,0,0) = 0 \\ f_z(0,0,0) = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \to$ Hp di Dini soddisfatte $\Rightarrow$ Uso Dini:

b) $(0,0)$ è punto di Sella per g?

Devo vedere se H è indefinito

$$g_x(0,0) = -\frac{f_x(0,0,0)}{f_z(0,0,0)} = -\frac{2xy^2z - ye^{xy} + 4x^3}{1}\Big|_{(0,0,0)} = 0$$

$$g_y(0,0,0) = -\frac{f_y(0,0,0)}{f_z(0,0,0)} = 0$$

1) $$f_z(x,y,z)\cdot g_x(x,y) + f_x(x,y,z)\Big|_{z=g(x,y)} = 0 = \quad = 2xy^2g - ye^{xy} + 4x^3 + g_x\underbrace{(e^g + x^2y^2)}_{f_z} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ derivo tutto rispetto a $x \Rightarrow = 2y^2g + 2xy^2g_x - y^2e^{xy} + 12x^2 + g_x(g_xe^g + 2xy^2) + g_{xx}(e^g + x^2y^2)$

$\Rightarrow \boxed{g_{xx}(0,0) = 0}$

$\Rightarrow$ derivo tutto rispetto a $y \Rightarrow = 4xyg + 2xy^2g_y + (g_ye^g + 2x^2y)g_x + (e^g + x^2y^2)g_{xy} - e^{xy} - xye^{xy} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{g_{xy}(0,0) = 1}$

2) $f_z(x,y,z)\cdot g_y(x,y) + f_y(x,y,z) \Rightarrow$ derivo tutto rispetto a $y \Rightarrow \boxed{g_{yy}(0,0) = 0}$

$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow$ indefinita $\Rightarrow (0,0)$ è punto di Sella.

ESERCIZI

4) ① del 23/10

Max/Min assoluti di $f(x,y,z) = 4 - z$ su $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2+y^2=8}_{g(x,y,z)}, \underbrace{x+y+z=1}_{h(x,y,z)}\}$

$g: \; x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow x^2, y^2 \leq 8 \iff |x|, |y| \leq 2\sqrt{2}$

$h: \; |z| = |1 - x - y| \leq 1 + |x| + |y| \leq 1 + 4\sqrt{2}$

$\Gamma \subset [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \times [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \times [-1-4\sqrt{2}, 1+4\sqrt{2}] \Rightarrow \Gamma$ è compatto.

Potevo usare le coordinate cilindriche?

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \rho^2 = 8 \Rightarrow \pm\rho = \pm 2\sqrt{2}$$

$\rho(\cos\theta + \sin\theta) + z = 1$

$\pm 2\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) + z = 1$

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z)$$

$\Downarrow$ Derivo

$$\begin{array}{l} L_x \\ L_y \\ L_\lambda \\ L_\mu \\ L_z \end{array}\begin{cases} f_x(x,y,z) - \lambda g_x(x,y,z) - \mu h_x(x,y,z) = 0 \\ f_y(x,y,z) - \lambda g_y(x,y,z) - \mu h_y(x,y,z) = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \\ x + y + z = 1 \\ f_z(x,y,z) - \lambda g_z(x,y,z) - \mu h_z(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Soluzioni: $(2, 2, -3)$; $(-2, -2, 5)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$f(2,2,-3) = 7$ max $\qquad f(-2,-2,5) = -1$ min.

---

5) ② del 23/10 Max/Min di $f(x,y) = xy$ in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + xy - 1 \leq 0\} \left\langle \begin{array}{l} \partial D \\ \mathring{D} \end{array} \right.$

D è compatto perché $\lim_{(x,y)\to\infty} g = \infty \Rightarrow \exists$ max/min di f in D

Se $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathring{D} \Rightarrow \nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow (\overset{f_x}{y}, \overset{f_y}{x}) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$ e $\in \mathring{D} \Rightarrow g(0,0) = -1 < 0$ $\quad f(0,0) = 0$

Se $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial D \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ è MAX VINCOLATO a $\partial D \Rightarrow \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda g(\bar{x}, \bar{y})$

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \lambda(2x + y) = 0 \\ x - \lambda(2y + x) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Soluzioni:

$(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow f = \frac{1}{3}$ max

$(\pm 1, \mp 1) \Rightarrow f = -1$ min

6) Max/Min $f(x,y) = (y-x^2)^3$ su $D = \{(x,y) \mid x+2 \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$

Se $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathring{D} \Rightarrow \nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x = -6x(y-x^2)^2 = 0 \\ f_y = 3(y-x^2)^2 = 0 \end{cases}$ $f(x,x^2) = 0 \in \mathring{D}$

Se $(\bar{x},\bar{y}) \in \partial D$ $\quad \partial D = \{(x,y) \mid y = x+2,\ -2 < x < 0\} \cup \{(x,y) \mid y = \sqrt{4-x^2},\ -2<x<0\}$

$\cup \{(0,-2);(-2,0)\}$ punti non regolari.

1| 28/10/19

TEO.	INVERSIONE LOCALE

$$Jf(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f: D \mapsto \mathbb{R}^n$, di classe C^1, $x_0 \in D$ t.c. $\det Jf(x_0) \neq 0$

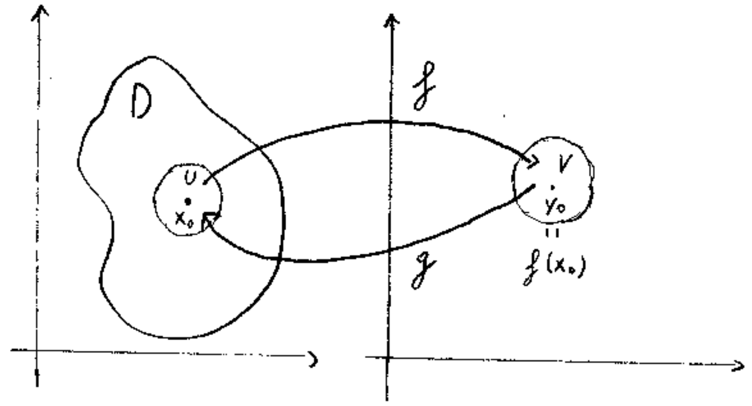
Allora $\exists\, U \subset D$ intorno di x_0 t.c. $f|_U : U \mapsto V = f(U)$ è biunivoca

e inoltre $g = (f|_U)^{-1} : V \to U$ è di classe C^1.

sia iniettiva che suriettiva

[ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B. $(a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$] [Se ogni elemento dell'insieme B è raggiunto da almeno una freccia.]

$$Jg(y) = Jf(g(y))^{-1}$$



$\boxed{\text{Dim.}}$

Definiamo $h(x,y) = f(x) - y$, $x \in D$, $y \in \mathbb{R}^n$

$$\det \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \det \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \det J_f(x_0) \neq 0 \rightarrow \text{Hp.}$$

$y_0 = f(x_0) \Rightarrow h(x_0, y_0) = f(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow \text{Dini} \Rightarrow \exists V \subset \mathbb{R}^n$ intorno di y_0 e

$g: V \to \mathbb{R}^n$, C^1, t.c. $h(g(y), y) = f(g(y), y) - y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(g(y)) = y \quad \forall y \in V$ g è iniettiva (ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B)

Perché?

↳ è invertibile

Perché? Dovrebbero essere diversi:

$g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2$ con $y_1, y_2 \in V$

è a che ci serve questo passaggio

$\Downarrow$

Hp. è invertibile

$\Rightarrow g: V \to U := g(V)$ è biunivoca $\Rightarrow \exists g^{-1}: U \to V$ e $g^{-1} = f|_U$: $\forall x \in U = g(V) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists! y \in U$ t.c. $x = g(y) \Rightarrow f(x) = f(g(y)) = y = g^{-1}(x) \Rightarrow$ ↳ spiegare meglio.

$$\Rightarrow (f|_U)^{-1} = g \text{ è di classe } C^1 \Rightarrow J_g(y) = -\left(\frac{\partial h}{\partial x}(g(y), y)\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial y}(g(y), y) =$$

$$= -J_f(g(y))^{-1}\underbrace{(-\mathbb{1}_n)}_{\text{matrice identità } n\times n} = J_f(g(y))^{-1} \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Def.}}$ $\boxed{\text{Diffeomorfismo}}$ D, E, aperti. Un diffeomorfismo di classe C^k è una $f: D \subset \mathbb{R}^n \to E \subset \mathbb{R}^n$ <u>biunivoca</u> <u>di classe C^k e t.c. $f^{-1}: E \to D$ sia di classe C^k</u>.

Se $f: D \subset \mathbb{R}^n \to E \subset \mathbb{R}^n$ biunivoca , di classe C^k e t.c. $\det J_f(x_0) \neq 0 \;\; \forall x \in D \Rightarrow$

TEO. INVERSIONE LOCALE

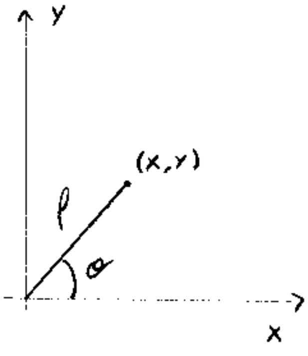
$\Rightarrow f^{-1}: E \to D$ è di classe $C^k \Rightarrow f$ è un diffeomorfismo.

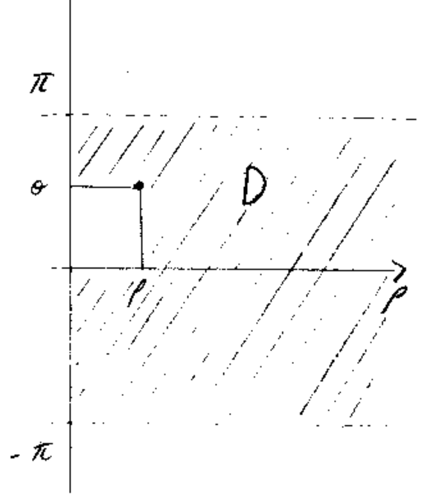
2| Esempi:

(a) Le coordinate polari. $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ con $\rho > 0$ e $\theta \in (-\pi, \pi)$

definisco una funzione $f : D = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \mapsto \mathbb{R}^2$

$f(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in C^\infty$ e iniettiva





dim iniettiva

$$\begin{cases} \rho_1 \cos\theta_1 = \rho_2\cos\theta_2 \\ \rho_1 \sin\theta_1 = \rho_2 \sin\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \rho_1^2 = \rho_1^2\cos^2\theta_1 + \rho_1^2\sin^2\theta_1 = $$
$$= \rho_2^2\cos^2\theta_2 + \rho_2^2\sin^2\theta = \rho_2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho_1 = \rho_2 \rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

suriettività

$f : D \mapsto E := f(D)$ è biunivoca, $\det J_f(\rho, \theta) =$

$$= \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \underline{\rho > 0} \Rightarrow f : D \mapsto E \text{ è un diffeomorfismo di classe } C^\infty$$

perchè?

$E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ dato $(x, y) \in E$ definiamo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$

$$\theta \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi \in \underline{\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)} & x, y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} \longrightarrow & x = 0,\ y < 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \longrightarrow & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} \longrightarrow & x = 0,\ y > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi \longrightarrow & x < 0,\ y > 0 \end{cases}$$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Cosa stiamo facendo e perchè?

$$\rho\cos\theta = \rho\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = \rho\frac{\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}} =$$

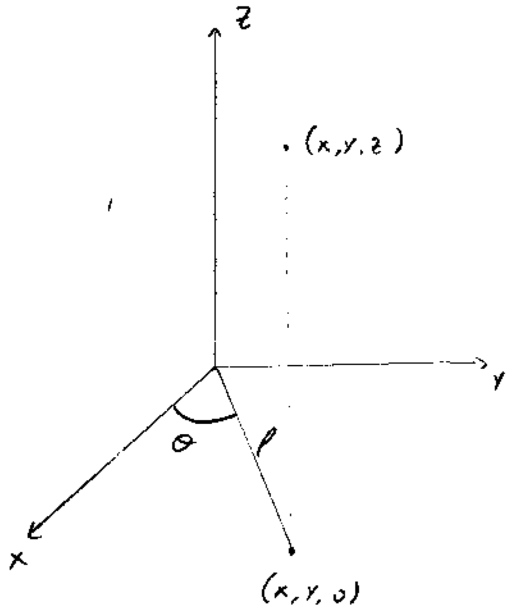
$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}}\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|}}\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} =$$

$$= |x|\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} = \rho\cos\theta = \begin{cases} -x\frac{\cos\theta}{-\cos\theta} = x & \theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ x\frac{\cos\theta}{\cos\theta} = x & \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 = x & \theta = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Con passaggi analoghi si vede che $\rho\sin\theta = y \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\rho, \theta) = (x, y)$

(b) Coordinate Cilindriche in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho > 0 \\ y = \rho\sin\theta & \\ z = z & \vartheta \in (-\pi, \pi) \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$



Definisco $f : (0, -\infty) \times (-\pi \times \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$f(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$

$f \in C^\infty(D)$ è biunivoca

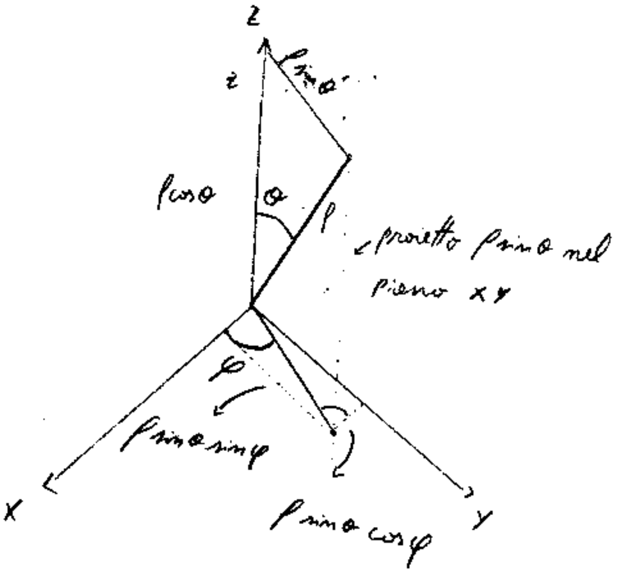
$$\det Jf(\rho, \theta, z) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f : D \to E = f(D) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0\}$

f è un diffeomorfismo

(c) Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho > 0 \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi & \theta \in (0, \pi) \\ z = \rho\cos\theta & \varphi \in (-\pi, \pi) \end{cases}$$



perchè $\ominus$?

Definisco $\underbrace{f : (0, -\infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3}$

$f \in C^\infty$ e biunivoca

$$\begin{cases} \rho_1 \sin\theta_1 \cos\varphi_1 = \rho_2 \sin\theta_2 \cos\varphi_2 \\ \rho_1 \sin\theta_1 \sin\varphi_1 = \rho_2 \sin\theta_2 \sin\varphi_2 \\ \rho_1 \cos\theta_1 = \rho_2 \cos\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \rho_1^2 \sin^2\theta_1 = \rho_2^2 \sin^2\theta_2 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

$$\det Jf(\rho, \theta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \rho^2 \sin\theta > 0 \Rightarrow$$

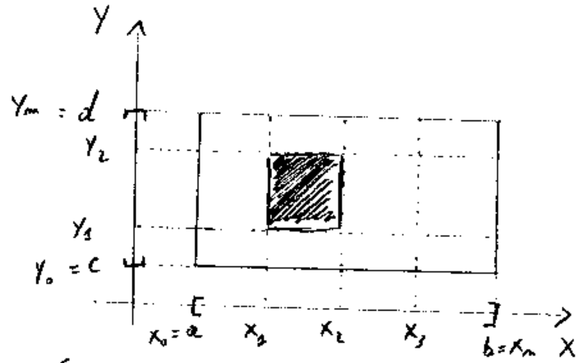
$\Rightarrow f: D \to E = f(D) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \mid x \le 0\}$ diffeomorfismo C^∞.

inversa: $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

φ = come per ϑ con le coordinate polari.

INTEGRALI DOPPI

$Q: [a,b] \times [c,d]$ rettangolo



| Def: | Suddivisione di Q |

Una suddivisione/decomposizione di Q è un insieme di punti della forma:

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{(x_i, y_j) \mid i = 0 \dots n,\ j = 0 \dots m\}$ dove

$\mathcal{D}_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ è una suddivisione di $[a,b]$ e

$\mathcal{D}_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$ è una suddivisione di $[c,d]$

$Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $\quad i = 1 \dots n \quad j = 1 \dots m$ rettangoli della suddivisione $\mathcal{D}$

$f: Q \to \mathbb{R}$ limitata $\quad m_{ij} := \inf_{Q_{ij}} f = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in Q_{ij}\} \in \mathbb{R}$

$$M_{ij} := \sup_{Q_{ij}} f = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in Q_{ij}\} \in \mathbb{R}$$

$|Q_{ij}|$ = area di $Q_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

$S(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} |Q_{ij}|$ Somma di Riemann superiore di f relativa alla suddivisione $\mathcal{D}$

$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} |Q_{ij}|$ Somma di Riemmann inferiore

$s(D,f) \leq S(D,f) \quad \forall\, D \left(\Leftarrow m_{ij} \leq M_{ij} \right)$

Def: Fitto.

D' è più fitto di D se $D \subset D' \Rightarrow \begin{array}{l} S(D,f) \geq S(D',f) \\ s(D,f) \leq s(D',f) \end{array}$

$\forall\, D_1, D_2$

$s(D_1, f) < s(D_1 \cup D_2, f) \leq S(D_1 \cup D_2, f) \leq S(D_2, f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup_D s(D,f) \leq \inf_D S(D,f)$

Def:	Integrabile secondo Riemann

$f : Q \to \mathbb{R}$ limitata si dice <u>Integrabile (secondo Riemann)</u> se:

$$\inf_D S(D,f) = \sup_D s(D,f) =: \int_Q f = \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$$

Esempi:

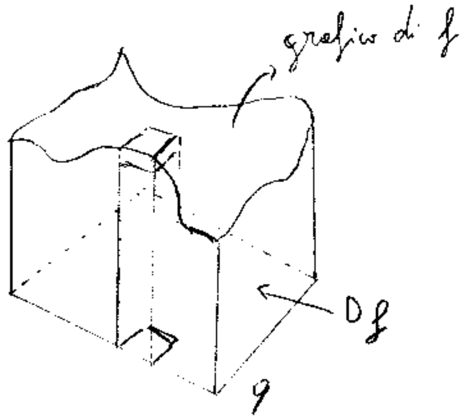
(a) $f(x,y) = c \geq 0 \quad \forall (x,y) \in Q$, $\forall \mathcal{D}$ suddivisione di Q

$M_{ij} = m_{ij} = c \quad \forall_{i,j} \Rightarrow S(\mathcal{D},f) = \sum_{ij} c\,|Q_{ij}| = c \sum_{ij} |Q_{ij}| = c\,|Q| = s(\mathcal{D},f)$

$\Rightarrow \iint_Q c\, dx\, dy = c\,|Q|$

$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x,y),\ (x,y) \in Q\}$

$\iint_Q f(x,y)\, dx\, dy =$ volume di D_f



(b) funzione di Dirichlet $\quad Q = [0,1] \times [0,1]$

$$\chi(x,y) = \begin{cases} 1 & x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\forall$ suddivisione di Q $\quad M_{ij} = 1$ poiché in ogni Q_{ij} ci sono punti razionali

$m_{ij} = 0$

$S(D,f) = \sum_{ij} 1\,|Q_{ij}| = |Q| = 1$, $\quad s(D,f) = \sum_{ij} 0\,(Q_{ij}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup_D s(D,f) = 0 < 1 = \inf_D S(D,f) \Rightarrow \chi$ non è integrabile

TEO. PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DOPPI SU RETTANGOLI

(i) f è integrabile su $Q \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists D_\varepsilon$ t.c. $S(D_\varepsilon,f) - s(D_\varepsilon,f) < \varepsilon$

(ii) f, g integrabili, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ è integrabile e $\iint_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_Q f + \beta \int_Q g$

(iii) f, g integrabili e $f \le g \Rightarrow \int_Q f \le \int_Q g$

(iv) f è integrabile $\Rightarrow |f|$ e integrabile e $\left|\int_Q f\right| \le \int_Q |f|$

(V) Se f è continua in $Q \Rightarrow f$ è integrabile.

(vi) f è int. $\Rightarrow \inf_Q f \le \frac{1}{|Q|}\int_Q f \le \sup_Q f$ (proprietà della media)

TEO. FORMULE DI RIDUZIONE

f integrabile su $Q = [a,b]\times[c,d]$

qui fisso la x e faccio variare la y

(i) se $\forall x \in [a,b]$ la funzione $y \in [c,d] \mapsto f(x,y)$ è integrabile su $[c,d]$

$\Downarrow$

la funzione $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, $x \in [a,b] \Rightarrow g(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e

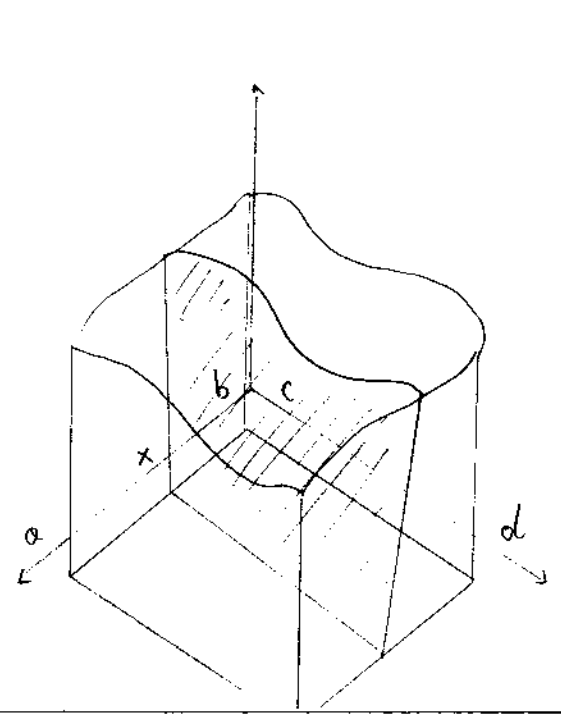
$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$$

qui fisso la y e faccio variare la x.

(ii) se $\forall y \in [c,d]$ la funzione $x \in [a,b] \mapsto f(x,y)$ è integrabile in $[a,b]$

$\Downarrow$

Tutto simmetrico a (i).



2|

dim (i) $\quad f$ è int. su $Q \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists D_\varepsilon$ t.c. $S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$ 107

$D_\varepsilon = D_{\varepsilon,1} \times D_{\varepsilon,2} \qquad D_{\varepsilon_1} = \{a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b\} \quad D_{\varepsilon_2} = \{c = y_0 < y_1 \dots y_m < d\}$

fissiamo $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $\qquad g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy = \sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \underset{\in Q_{ij}}{f(x,y)}\,dy \le$

$\le \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \int_{y_{j-1}}^{y_j} dy = \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1})$ $\qquad g(x) \ge \sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1})$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g \le \sup g \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

Moltiplichiamo per $(x_i - x_{i-1}) > 0$ e sommiamo su $i = 1 \dots n$

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \underbrace{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})}_{|Q_{ij}|}}^{s(D_\varepsilon, f)} \le \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i]} g\right)(x_i - x_{i-1})}^{s(D_{\varepsilon_1}, g)} \le$$

$$\le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} g\right)(x_i - x_{i-1})}_{S'(D_{\varepsilon 1}, g)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})}_{S(D_\varepsilon, f)}$$

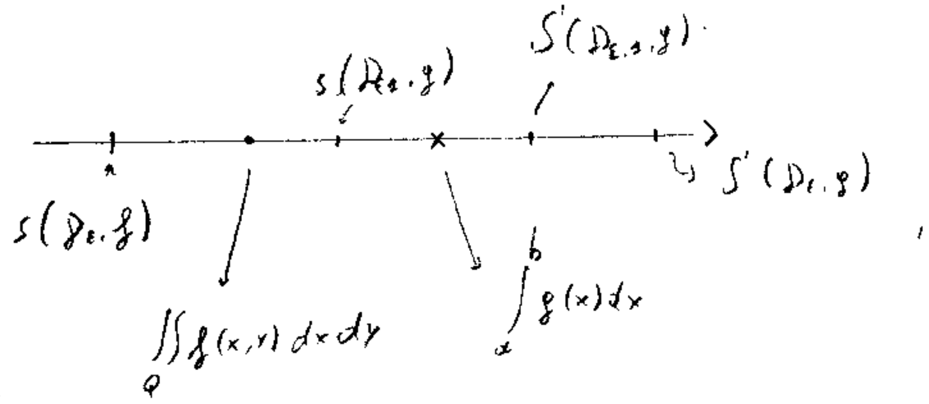
$$s(D_\varepsilon, f) \le s(D_{\varepsilon_1}, f) \le S'(D_{\varepsilon_1}, g) \le S(D_\varepsilon, f)$$

$$S'(D_\varepsilon, g) - s(D_\varepsilon, g) \le S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

$\Downarrow$

g è integrabile su $[a,b]$ $\qquad s(D_{\varepsilon_1}, g) \le \int_a^b g(x)\,dx \le S(D_{\varepsilon,1}, g)$

$$s(D_\varepsilon, g) \le \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy \le S(D_\varepsilon, g)$$



$\Downarrow$

$$\left| \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy - \int_a^b g(x)\,dx \right| < \varepsilon \qquad \varepsilon > 0 \text{ arbitrario } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d (f(x,y))\,dy \right] dx$$

se $f \in C(Q) \Rightarrow \forall x \in [a,b]$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è cont. in $[c,d] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ è integrabile.

Esempi

(a) $\quad f(x,y) = \log(1+x+2y) \qquad Q = [0,1]\times[1,2] \qquad \forall x,y \in Q \quad 1+x+2y \geq 1$

$\Rightarrow f \in C(Q)$

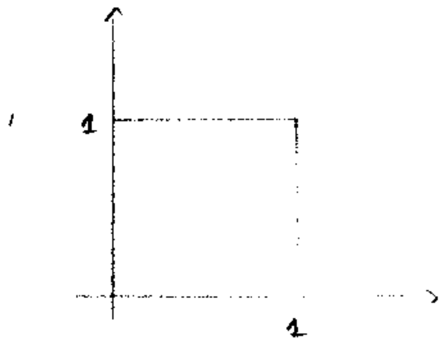
$$\iint_{[0,1]\times[1,2]} \log(1+x+2y)\,dx\,dy = \int_1^2 dy \int_0^1 dx \log(1+x+2y) \Rightarrow \int_0^1 dx \log(\overbrace{1+x+2y}^{t}) = \int_{1+2y}^{2+2y} dt \log t =$$

$$= t\left(\log(t)-1\right)\Big|_{1+2y}^{2+2y} = (2+2y)\left(\log(2+2y)-1\right) - (1+2y)\left(\log(1+2y)-1\right)$$

$$\int_1^2 dy\ \underbrace{(2+2y)}_{t}\left(\log(2+2y)-1\right) - \underbrace{(1+2y)}_{u}\left(\log(1+2y)-1\right) =$$

Esempio $\quad E = \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2 \quad f(x,y) = 1 \quad \forall x,y \in E$

$$\bar{f} \begin{cases} 1 & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \notin E \end{cases}$$ non è integrabile.



DEF. INSIEME MISURABILE

$E \subset \mathbb{R}^2$ limitato è misurabile (secondo Peano-Jordan) se dato Q rettangolo contenente E la funzione caratteristica di E

$$\chi_E(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \in Q \setminus E \end{cases}$$ è integrabile su Q, in tal caso si

definisce la misura (o l'area) di E come $|E| := \int_Q \chi_E$

ESERCIZI.

3]

$$= \frac{1}{2}\int_4^6 dt\, t(\log t - 1) - \frac{1}{2}\int_3^5 du\, u(\log(u) - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$\int dt\,(t\log(t) - t) = \frac{t^2}{2}\log t - \int \frac{t}{2}dt \quad - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2}\log t - \frac{3t^2}{4} = \frac{t^2}{2}\left(\log t - \frac{3}{2}\right)$$

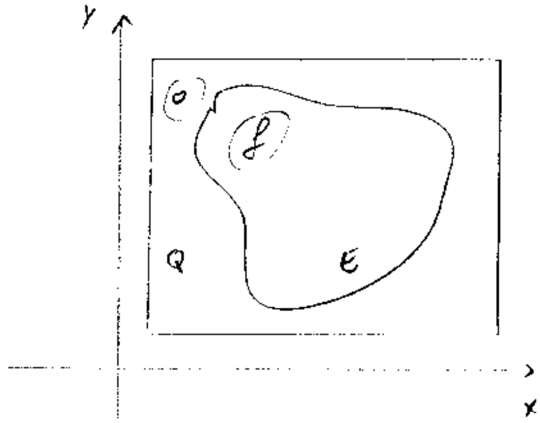
(b) $f(x,y) = x^3 e^{yx^2} \qquad Q = [1,2]\times[1,3] \qquad f \in C^0(Q)$

$$\iint_{[1,2]\times[1,3]} x^3 e^{yx^2} dx\,dy = \int_1^2 dx \int_1^3 dy\, x^3 e^{yx^2} = \int_1^2 dx\, x^3 \int_1^3 dy\, e^{yx^2} = \int_1^2 dx\, x^3 \frac{1}{x^2} e^{yx^2}\Big|_{y=1}^{y=3} =$$

$$= \int_1^2 dx\, x\left(e^{3x^2} - e^{x^2}\right) = \left(t = x^2 \quad dt = 2x\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_1^4 dt\left(e^{3t} - e^t\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}e^{3t} - e^t\right)_1^4$$

Def

$E \subset \mathbb{R}^2$ limitato, $f: E \to \mathbb{R}$ limitata f si dice integrabile su E se dato un rettangolo $Q \supset E$ la funzione



$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \in Q \setminus E \end{cases}$$

è integrabile su Q, in tal caso si pone:

$$\int_E f = \iint_E f(x,y)\,dx\,dy := \int_Q \bar{f}$$

1 4/11/19

$E \subset \mathbb{R}^2$ limitato è misurabile $\iff \chi_E$ è integrabile in un rettangolo $Q \supset E$

$|E| = \int_Q \chi_E = \int_E 1$ dove $|E|$ = misura di E

Teo

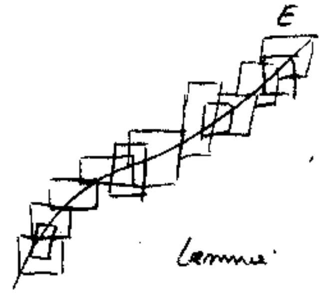
$E \subset \mathbb{R}^2$ limitato, E è misurabile $\iff \partial E$ è misurabile e $|\partial E| = 0$

Esempio: $E = \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$ non è misurabile $\partial E = [0,1]^2$ $|\partial E| = 1 \neq 0$

Lemma:

$E \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile. $|E| = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q_1 \dots Q_N$ Rettangoli tali che

$E \subset \bigcup_{K=1}^{N} Q_K$ e $\sum_{K=1}^{N} |Q_K| < \varepsilon$



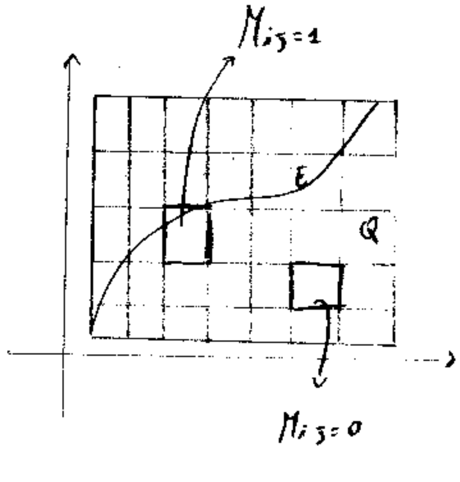
Dim. Lemma:

($\Rightarrow$) Se $\overset{Hp.}{|E| = 0} \Rightarrow$

funzione caratteristica

$|E| = 0 = \int_Q \chi_E = \inf_D S(D, \chi_E) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists D_\varepsilon$ suddivisione di Q t.c.

$$S(D_\varepsilon, \chi_E) < \varepsilon$$



$S(D_\varepsilon, \chi_E) = \sum_{ij} M_{ij} |Q_{ij}| = \sum_{Q_{ij} \cap E \neq \emptyset} |Q_{ij}| < \varepsilon$

$M_{ij} = \sup_{Q_{ij}} \chi_E = 1 \iff Q_{ij} \cap E \neq \emptyset$

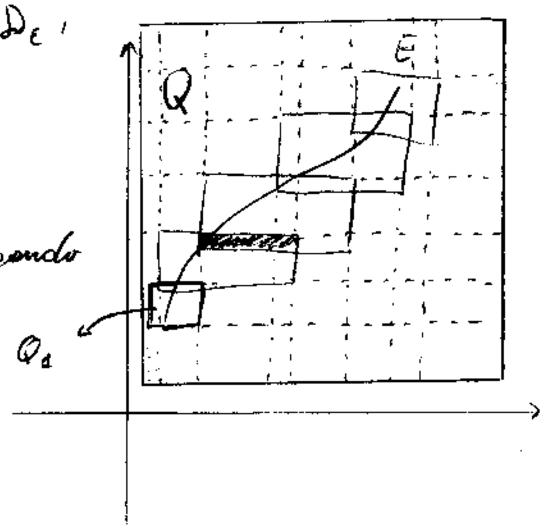
vale 1 su E e 0 fuori da E

$E \subset \bigcup_{Q_{ij} \cap E \neq 0} Q_{ij}$ ■

$(\Leftarrow)\ \exists\ \sum |Q_{ij}| < \varepsilon$

Dato $\varepsilon > 0$ siano $Q_1 \dots Q_N$ rettangoli t.c. $E \subset \bigcup_{k=1}^{N} Q_k$, $\sum_{k=1}^{N} |Q_k| < \varepsilon$

Sia $Q \supset \bigcup_{k=1}^{N} Q_k$ => basta dimostrare che $\exists$ suddivisione D_ε di Q t.c. $S(D_\varepsilon, \chi_E) < \varepsilon \iff |E| = \int_Q \chi_E = 0$



Sia D_ε la suddivisione di Q rettangolo, ottenuta prolungando i lati dei rettangoli Q_k $\forall k = 1 \dots N$ sia

$$R_k = \{ Q_{ij} \mid Q_{ij} \subset Q_k \} \qquad \sum_{Q_{ij} \in R_k} |Q_{ij}| = |Q_k|$$

$$S(D_\varepsilon, \chi_E) = \sum_{Q_{ij} \cap E \neq \emptyset} |Q_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{N} \sum_{Q_{ij} \in R_k} |Q_{ij}| = \sum_{k=1}^{N} |Q_k| < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

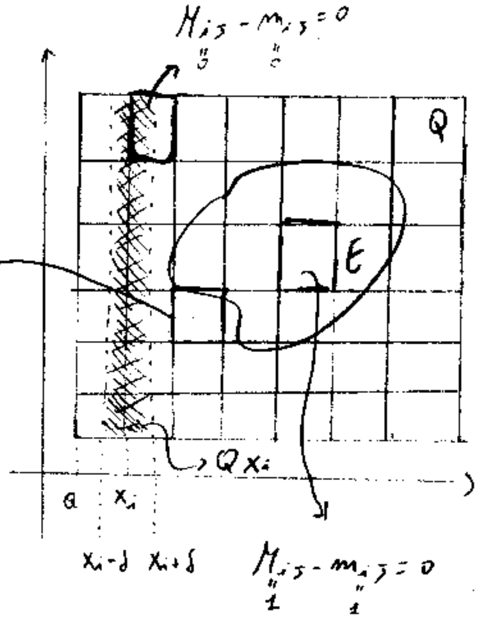
Dim. TEOREMA. $\boxed{\text{(complicata)}}$

$(\Rightarrow)$ H_p: E è misurabile $\iff \chi_E$ è integrabile in $Q \supset E \iff$

$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists D_\varepsilon$ suddivisione di Q t.c. $S(D_\varepsilon, \chi_E) - s(D_\varepsilon, \chi_E) < \varepsilon$

$$S(D_\varepsilon, \chi_E) - s(D_\varepsilon, \chi_E) = \sum_{ij} (M_{ij} - m_{ij}) Q_{ij} \qquad M_{ij} - m_{ij} = \sup_{Q_{ij}} \chi_E - \inf_{Q_{ij}} \chi_E$$

$$M_{ij} - m_{ij} \begin{cases} = 1 & \iff Q_{ij} \cap E \neq \emptyset \text{ e } Q_{ij} \cap E^c \neq \emptyset \\ = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$R_E = \{ Q_{ij} \mid Q_{ij} \cap E \neq \emptyset,\ Q_{ij} \cap E^c \neq 0 \}$$

$$S(D_\varepsilon, \chi_E) - s(D_\varepsilon, \chi_E) = \sum_{Q_{ij} \subset R_E} |Q_{ij}|$$

definiamo

$$R_1 = \{ Q_{ij} \mid \mathring{Q}_{ij} \cap E \neq \emptyset,\ \mathring{Q}_{ij} \cap E^c \neq \emptyset \}$$

$$R_1 \subset R_E$$

2) Definiamo

$$Q_{x_i} = [x_i - \delta,\ x_i + \delta] \times [c, d] \qquad i = 0, \dots n$$

con $\delta > 0$

$$Q_{y_j} = [a, b] \times [y_j - \delta,\ y_j + \delta] \qquad j = 0, \dots m \quad , \quad \text{t.c.}$$

$$\sum_{i=0}^{n} |Q_{x_i}| + \sum_{j=0}^{m} |Q_{y_j}| < \varepsilon$$

Sia $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \{ Q_{x_i}, Q_{y_j} \mid i = 0 \dots n,\ j = 0 \dots m \}$ (famiglia finita di rettangoli)

Sia $(x,y) \in \partial E \Rightarrow \exists\, Q_{ij}$ t.c. $(x,y) \in Q_{ij}$

Se $(x,y) \in \mathring{Q}_{ij} \Rightarrow \mathring{Q}_{ij} \cap E \neq \emptyset,\ \mathring{Q}_{ij} \cap E^c \neq \emptyset \Rightarrow Q_{ij} \in \mathcal{R}_1$

Se $(x,y) \in \partial Q_{ij} \Rightarrow (x,y) \in Q_{x_i}$, o $(x,y) \in Q_{y_j}$

$$\partial E \subset \bigcup_{Q_k \in \mathcal{R}} Q_k \qquad \sum_{Q_k \in \mathcal{R}} |Q_k| = \sum_{Q_{ij} \in \mathcal{R}_1} |Q_{ij}| + \left[\sum_{i=0}^{n} |Q_{x_i}| + \sum_{j=0}^{m} |Q_{y_j}| \right] \leq$$

$$\leq \underbrace{\left[\sum_{Q_{ij} \in \mathcal{R}_E} |Q_{ij}| \right]}_{= S(D_\varepsilon, \chi_E) - s(D_\varepsilon, \chi_E)} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

■

$(\Leftarrow)$ Hp: $|\partial E| = 0 \Rightarrow$ è misurabile $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, D_\varepsilon$ suddivisione di Q t.c. $S(D_\varepsilon, \chi_{\partial E}) - s(D_\varepsilon, \chi_{\partial E}) < \varepsilon$

$$\mathcal{R}_{\partial E} = \{ Q_{ij} \mid Q_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset,\ Q_{ij} \cap \partial E^c \neq \emptyset \} \qquad S(D_\varepsilon, \chi_{\partial E}) - s(D_\varepsilon, \chi_{\partial E}) = \sum_{Q_{ij} \in \mathcal{R}_{\partial E}} |Q_{ij}|$$

$Q_{ij} \in \mathcal{R}_E \Leftrightarrow \underbrace{Q_{ij} \cap E \neq \emptyset,\ Q_{ij} \cap E^c \neq \emptyset}_{Q_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset}$ e inoltre $Q_{ij} \cap \partial E^c \neq 0$

(altrimenti $Q_{ij} \subset \partial E \Rightarrow |\partial E| \geq |Q_{ij}| > 0$ assurdo)

$$\Rightarrow R_E \subset R_{\partial E} \qquad S(D_\varepsilon, \chi_E) - s(D_\varepsilon, \chi_E) = \sum_{Q_{is} \in R_E} |Q_{is}| \le \sum_{Q_{is} \in R_{\partial E}} |Q_{is}| =$$

$$= S(D_\varepsilon, \chi_{\partial E}) - s(D_\varepsilon, \chi_{\partial E}) < \varepsilon$$

$$S(D_\varepsilon, \chi_{\partial E}) = \sum_{Q_{is} \in R_{\partial E}} |Q_{is}|$$

Teo. Proprietà degli insiemi misurabili

$E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^2$ misurabili:

(i) $E_1 \cup E_2$ misurabile

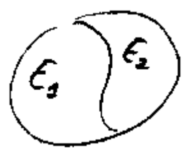
(ii) $E_1 \cap E_2$ misurabile

(iii) $|E_1 \cap E_2| = 0 \Rightarrow |E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$

(iv) Se $|E_1 \cap E_2| = 0$ e $f: E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}$ è integrabile (su $E_1 \cup E_2$)

$$\Downarrow$$

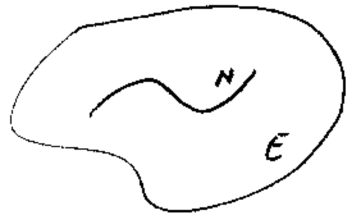
f è integrabile su E_1 e E_2 $\displaystyle = \int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$



Def

$E \subset \mathbb{R}^2$ $f: E \to \mathbb{R}$ si dice generalmente continua (o continua quasi ovunque)

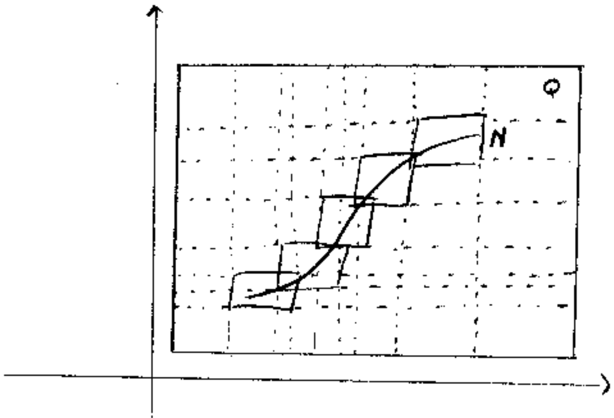
Se $\exists\, N \subset E$ t.c. $|N| = 0$ e f è continua su $E \setminus N$



TEO.

$Q \subset \mathbb{R}^2$ rettangolo, $f: Q \to \mathbb{R}$ limitata e generalmente continua $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ è integrabile su Q.



DIM. $|N| = 0 \overset{\text{LEMMA}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, Q_1 \ldots Q_N$ rettangoli t.c.

$N \subset \bigcup_{k=1}^{N} \mathring{Q}_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{N} Q_k < \varepsilon \quad$ (anche $\mathring{Q}_k < \varepsilon$)

Sia $B := \bigcup_{k=1}^{N} \mathring{Q}_k$ aperto $\Rightarrow Q \setminus B$ è compatto

e f è continua in $Q \setminus B \Rightarrow f$ è uniformemente continua $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad$ t.c. $\quad \forall\, (x', y'), (x'', y'') \in Q \setminus B \Rightarrow \|(x', y') - (x'', y'')\| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \left| f(x', y') - f(x'', y'') \right| < \varepsilon$

Sia D_ε la suddivisione di Q ottenuta prolungando i lati dei rettangoli Q_k e infittendo

in modo tale che $\quad$ diametro $Q_{ij} = \sup\limits_{\substack{(x', y') \in Q_{ij} \\ (x'', y'') \in Q_{ij}}} \|(x', y') - (x'', y'')\| < \delta$

↗ gira pag.

$$S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) = \sum_{ij} (M_{ij} - m_{ij})\,|Q_{ij}| = \sum_{Q_{ij} \subset \bigcup_K Q_K} (M_{ij} - m_{ij})\,|Q_{ij}| + \sum_{Q_{ij} \subset Q \setminus B} (M_{ij} - m_{ij})\,|Q_{ij}|$$

$Q_{ij} \subset Q \setminus B \qquad M_{ij} = \sup\limits_{Q_{ij}} f \overset{\text{WEIERSTRASS}}{=} f(x''_{ij}, y''_{ij})$

$\qquad m_{ij} = \inf\limits_{Q_{ij}} f = f(x'_{ij}, y'_{ij})$

$\|(x''_{ij}, y''_{ij}) - (x'_{ij}, y'_{ij})\| < \delta$

$\Downarrow$

$M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$

$$\sum_{Q_{ij} \subset Q \setminus B} (M_{ij} - m_{ij})\,|Q_{ij}| < \varepsilon \sum_{Q_{ij} \subset Q \setminus B} |Q_{ij}| \leq \varepsilon \cdot |Q|$$

Definiamo

$$M = \sup_Q |f| < +\infty \quad \text{(} f \text{ è limitata)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{-|f|}_{\Downarrow} \le f \le \underbrace{|f|}_{\Downarrow} \\ -M \le m_{ij} \qquad M_{ij} \le M \end{array}\right\} \Rightarrow M_{ij} - m_{ij} \le 2M$$

$$\sum_{Q_{ij} \subset \bigcup_K Q_K} (M_{ij} - m_{ij}) |Q_{ij}| \le 2M \sum_{Q_{ij} \subset \bigcup_K Q_K} |Q_{ij}| \le 2M \sum_{K=1}^{N} |Q_K| < 2M\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon \left(2M + |Q|\right)$$

$\boxed{\text{TEO.}}$ FORMULE DI RIDUZIONE NORMALI.

$E \subset \mathbb{R}^2$, $f: E \to \mathbb{R}$ limitata e continua.

(i) Se $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ e g_1, g_2 integrabili su $[a,b]$

Allora $\displaystyle\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, f(x,y)\right]$

(ii) Se $E = \{(x,y) \mid y \in [c,d],\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$ h_1, h_2 integrabili su $[c,d]$

Allora $\displaystyle\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, f(x,y)\right]$

$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $Q = [a,b] \times [c,d] \supset E$ Allora per definizione $\Rightarrow$

$\displaystyle\Rightarrow \iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_Q \bar{f}(x,y)\,dx\,dy$ $\quad \forall x \in [a,b]$ la funzione $y \in [c,d] \mapsto \bar{f}(x,y)$

È CONTINUA in $[c,d] \setminus \{g_1(x), g_2(x)\} \to$ è integrabile in $[c,d]$

$\Downarrow$ → formule di riduzione per rettangoli

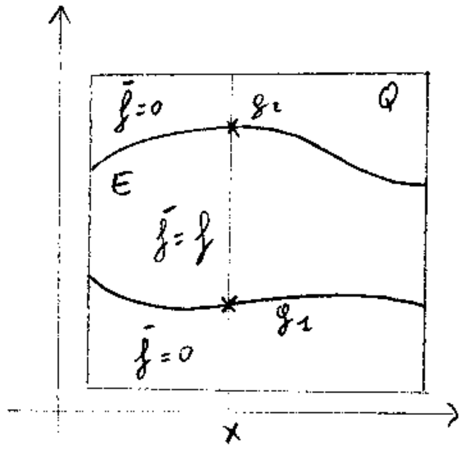
$$\iint_Q \bar{f}(x,y)\,dxy = \int_a^b dx \int_c^d dy\, \bar{f}(x,y) \quad \left(\begin{array}{l}\bar{f}(x,y)=0 \\ \text{se } y < g_1(x) \text{ o } y > g_2(x)\end{array}\right) =$$

$$= \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, f(x,y).$$

In particolare se

$E = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

$$|E| = \iint_E 1\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\,dy = \int_a^b dx\,[g_2(x) - g_1(x)]$$



TEO.: CAMBIAMENTO VARIABILI (E)

$A, B, \subset \mathbb{R}^2$ Aperti. $\Phi : A \to B$ diffeomorfismo. Allora:

(i) $E \subset B$ è Misurabile $\iff \Phi(E) \subset A$ è Misurabile

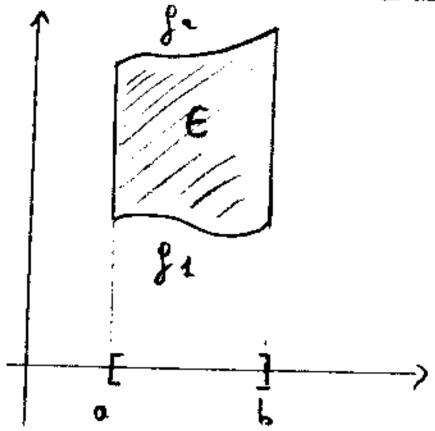
(ii) Se $E \subset B$ è Misurabile e $f : E \to \mathbb{R}$ è continua e limitata Allora:

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u,v))\,\left|\det J_\Phi(u,v)\right|\,dv\,du$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

$x = g(t)$

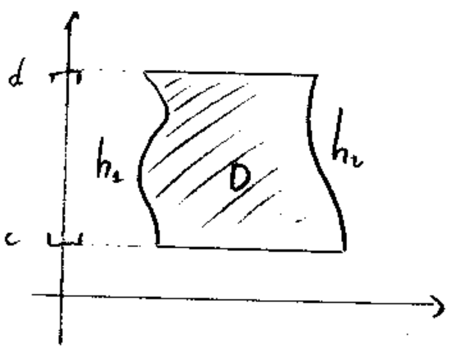
DEF.: INSIEMI NORMALI (B)



$E \subset \mathbb{R}^2$ si dice insieme normale rispetto all'asse x se

$\exists\, g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili su $[a,b]$ t.c.

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$



$D \subset \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse y se

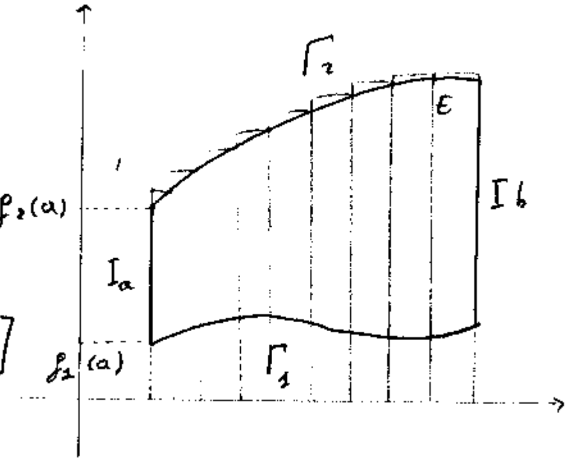
$\exists\, h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ integrabili su $[c,d]$ t.c.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

TEO: (C)

$E \subset \mathbb{R}^2$ normale rispetto a x (o y) è misurabile.

$\boxed{\text{Dim}}$



Basta dimostrare che $|\partial E| = 0$

$\partial E = I_a \cup I_b \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$I_a = \{a\} \times [g_1(a), g_2(a)] \subset [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \times [g_1(a), g_2(a)]$

$[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \times [g_1(a), g_2(a)] = 2\varepsilon\,(g_2(a) - g_1(a)) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$ $\Rightarrow |I_a| = 0$

Lemma

Analogamente $|I_b| = 0$

$\Gamma_2 = \left\{ (x,y) \mid x \in [a,b],\ y = g_2(x) \right\}$ (grafico di g_2) g_2 è integrabile su $[a,b]$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, D_\varepsilon$ suddivisione di $[a,b]$ t.c.:

$$\varepsilon > S(D_\varepsilon, g_2) - s(D_\varepsilon, g_2) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} g_2 - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g_2 \right) [x_i, x_{i-1}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |Q_i| \Rightarrow |Q_i| = [x_{i-1}, x_i] \times [\inf_{[x_{i-1}, x_i]} g_2, \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g_2] \quad e$$

$$\Gamma_2 \subset \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \overset{\text{LEMMA}}{\Rightarrow} |\Gamma_2| = 0$$

Analogamente $|\Gamma_1| = 0$

Teo. (A)

$Q \subset \mathbb{R}^2$ Rettangolo. $f: Q \to \mathbb{R}$ Limitata e generalmente continua $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ è INTEGRABILE SU Q.

Corollario:

$E \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile $f: E \to \mathbb{R}$ limitata e continua $\Rightarrow$

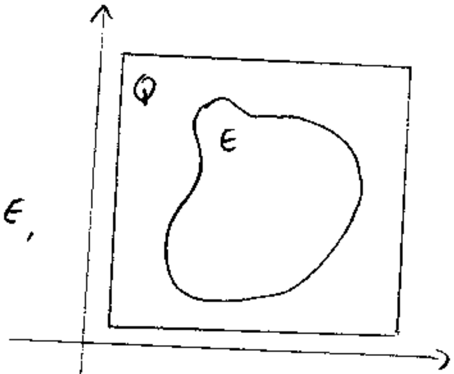
$\Rightarrow f$ è INTEGRABILE SU E

Dim.

f è integrabile su $E \Leftrightarrow$ La funzione $\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y)\ Q \setminus E \end{cases}$
è integrabile su Q.

$\bar{f}$ non è continua al più su ∂E

($\bar{f}$ è continua in $\mathring{E}$ poiché coincide con f continua in E, ed è continua in $(Q \setminus E)^\circ$ poiché è costante)



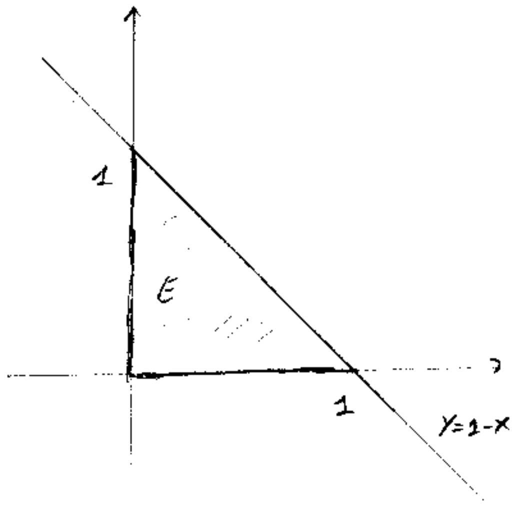
E misurabile $\Rightarrow |\partial E| = 0 \Rightarrow \bar{f}$ è generalmente continua su $Q \Rightarrow$ è integrabile.

1 7/11/2019

(1) $\displaystyle\iint_E (1-x-y)\,dx\,dy \qquad E = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$

$$x+y \leq 1 \Updownarrow y \leq 1-x$$

$$E = [0,1] \times [0, 1-x]$$

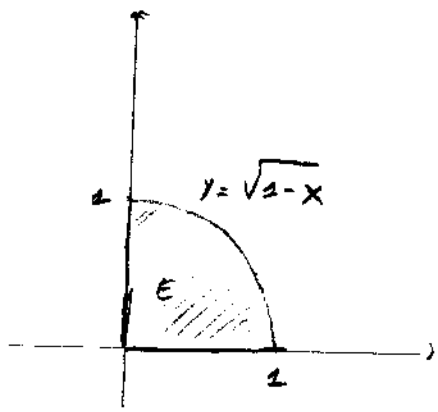


$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} 1-x-y\,dy = \int_0^1 dx \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 dx\left(\frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

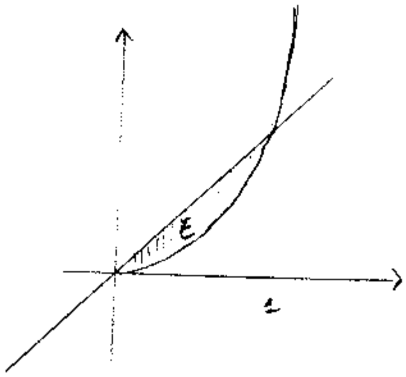
(2) $\displaystyle\iint_E xy\,dx\,dy \qquad E = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

$$E = [0,1] \times [0, \sqrt{1-x^2}]$$



$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\, xy = \int_0^1 dx\ x(x - x^3) = \frac{1}{8}$$

(3) $\displaystyle\iint_E (x+y)\,dx\,dy \qquad E = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \quad x^2 \leq y \leq x\}$



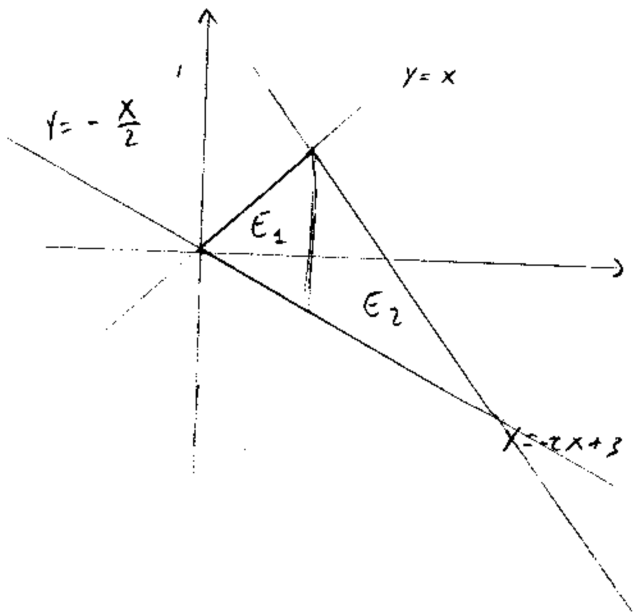
$$\int_0^1 dx \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_x^{x^2} = \int_0^1 dx\left(x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2}\right) = -\frac{3}{20}$$

(4) $\iint_E (x-y)^2 \, dx\, dy$ $\qquad E = (0,0), (1,1), (2,-1)$

$E_1 = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1, \ -\frac{x}{2} \le y \le x \}$

$E_2 = \{ (x,y) \mid 1 \le x \le 2 , \ -\frac{x}{2} \le y \le -2x+3 \}$

normali rispetto a x.



$\underline{E_1}$ $\qquad \int_0^1 dx \int_{-\frac{x}{2}}^{x} dy \, (x-y)^2 = \int_0^1 dx \left[xy - \frac{y^3}{3} \right]\Big|_{-\frac{x}{2}}^{x} =$

$= \int_0^1 dx \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{\cancel{9}\,3 x^3}{\cancel{24}\,8} \right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{32}$

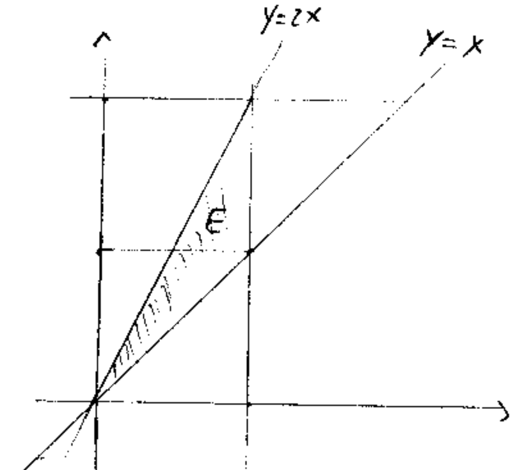
$\underline{E_2}$

$\int_1^2 dx \int_{-\frac{x}{2}}^{-2x+3} (x-y)^2 \, dy =$

(5) $\iint_E e^{y/x} \, dx\, dy$ $\qquad E = \{ (x,y) \mid 0 \le y \le 2 , \ \frac{y}{2} \le x \le \min\{1, y\} \}$

$[0,1] \times [x, 2x]$

normale rispetto a x



$\int_0^1 dx \left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_x^{2x} =$

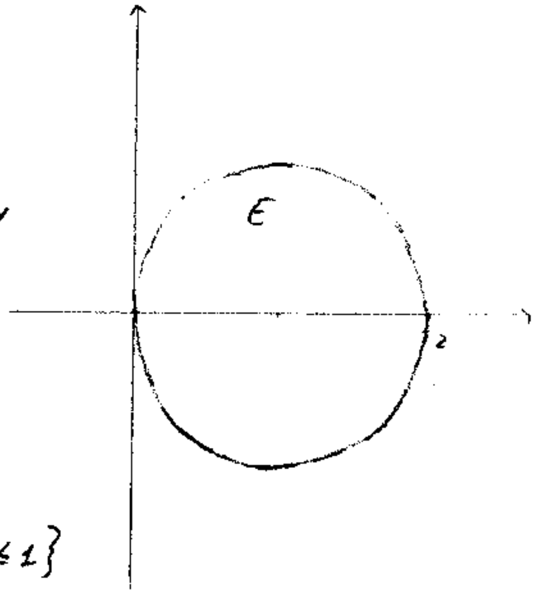
$= \frac{1}{2} e^2 - e$

2| (6) $\displaystyle\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad E=\{(x,y)\mid x^2+y^2-2x\le 0\}$

$(x^2+y^2-2x) = (x-1)^2+y^2-1\le 0$

Coordinate polari in $(1,0)$

$$\Psi:\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

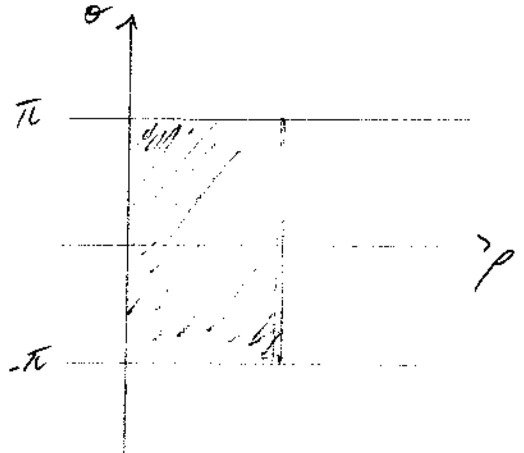


$$\iint_{\Psi^{-1}(E)} f(\Psi(\rho,\theta))\underbrace{\left|\det J_\Psi(\rho,\theta)\right|}_{\rho}\,dr\,d\theta = \iint_E f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\Psi^{-1}(E)=\{(\rho,\theta)\mid (1+\rho\cos\theta-1)^2+\rho^2\sin\theta\le 1\}$$

$$=\{(\rho,\theta)\mid \rho^2\le 1\} = \{(\rho,\theta)\in(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)\mid \rho\le 1\}$$

$=$ rettangolo $[0,1]\times[-\pi,\pi]$



$$\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\int_0^1 d\rho\,\rho\sqrt{1+2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

Coordinate Polari in $(0,0)$

$$\Psi:\begin{cases} x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

$\Psi^{-1}(E)$: $\{(\rho,\theta)\mid(\rho\cos\theta-1)^2+\rho^2\sin^2\theta=\rho^2-2\rho\cos\theta+\cancel{1}\le\cancel{1}\Rightarrow$

$\Rightarrow\{(\rho,\theta)\mid \rho^{\cancel{2}}\le 2\cancel{\rho}\cos\theta\}$ $0\le\rho\le 2\cos\theta$

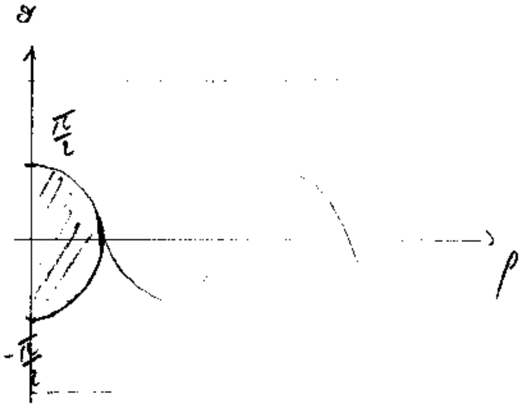
$\Rightarrow \cos\theta\ge 0$

$\Downarrow$

$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,2\cos\theta]$

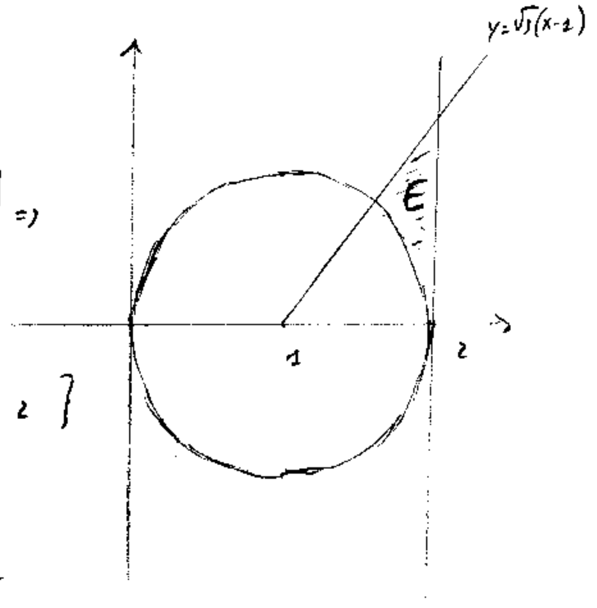
normale rispetto all'asse θ



$$\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} d\rho\cdot\rho^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} d\theta \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{\rho=0}^{\rho=2\cos\theta} = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{32}{9}$$

(7) $$\iint_E \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\,dx\,dy \qquad E=\left\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\geq 1,\ 0\leq y\leq \sqrt{3}(x-1),\ 1\leq x\leq 2\right\}$$

Coordinate Polari in $(1,0)$



$$\Phi:\begin{cases} x=1+\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta\end{cases} \qquad \Phi^{-1}(E)=[0,+\infty)\times[-\pi,\pi]\ \Big| \Rightarrow$$

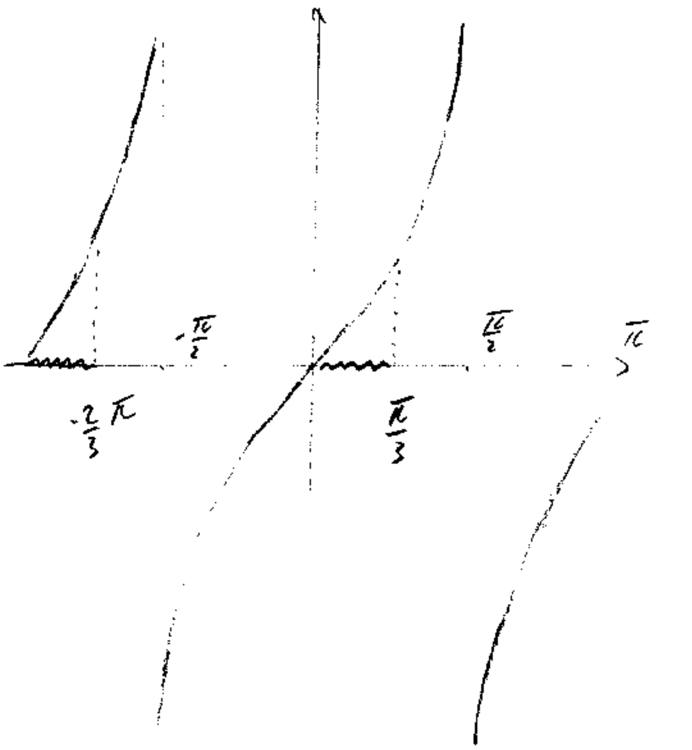
$$\Rightarrow \Big|\ \rho^2\geq 1,\quad 0\leq \rho\sin\theta\leq\sqrt{3}\rho\cos\theta,\quad 1\leq 1+\rho\cos\theta\leq 2\ \Big]$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

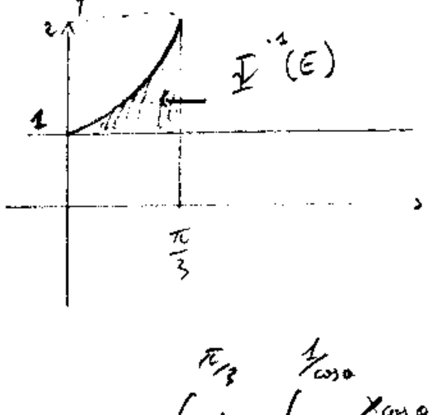
$$\rho\geq 1,\quad 0\leq \operatorname{tg}\theta\leq\sqrt{3},\quad 0\leq\rho\leq\frac{1}{\cos\theta}$$

$\Updownarrow$ perché

$$\theta\in\cancel{[-\pi,-\tfrac{2\pi}{3}]}\cup[0,\tfrac{\pi}{3}]$$



$$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3},\quad 0\leq\rho\leq\frac{1}{\cos\theta}$$



$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/3} d\theta\int^{1/\cos\theta}\frac{\cancel{\rho}\cos\theta}{\cancel{\rho^2}}\cdot\cancel{\rho}\,d\rho =$$

$$=\int_0^{\pi/3} d\theta\cos\theta\int_1^{1/\cos\theta} d\rho = \int_0^{\pi/3} d\theta\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right) = \int_0^{\pi/3} d\theta\,(1-\cos\theta) = \frac{\pi}{3}-\sin\theta\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(23)

3| $\iint_E x\,dx\,dy \qquad E = \{ 1 \le x^2+y^2 \le 2 , \; x \le -|y| \}$

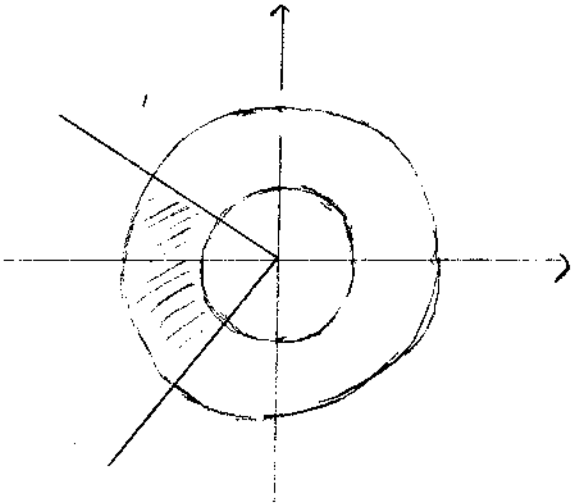
coordinate Polari

$\Phi^{-1}(E) = \{ (\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \mid \Rightarrow$

$\Rightarrow \mid 1 \le \rho^2 \le 2 , \; \rho\cos\theta \le -\rho|\sin\theta| \}$

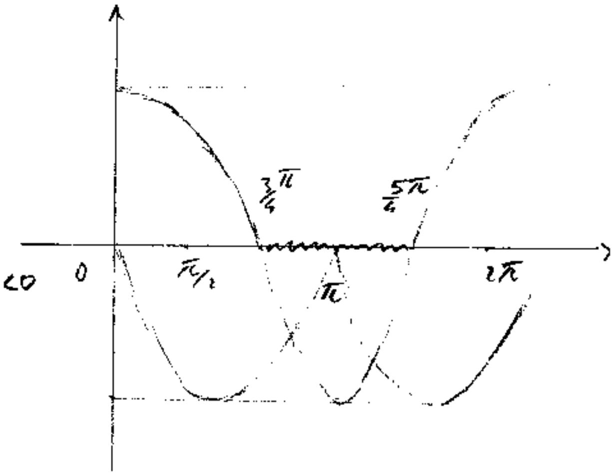
$\Updownarrow$

$1 \le \rho \le \sqrt{2}$



$\Phi^{-1}(E) = \{ 1 \le \rho \le \sqrt{2} , \; \frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{5}{4}\pi \}$

$$\iint_E x\,dx\,dy = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \cos\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) < 0$$



(8) $\iint (x-y)\log(x+y)\,dx\,dy \qquad E = \{ (x,y) \mid x-1 \le y \le x , \; 1-x \le y \le 3-x \}$

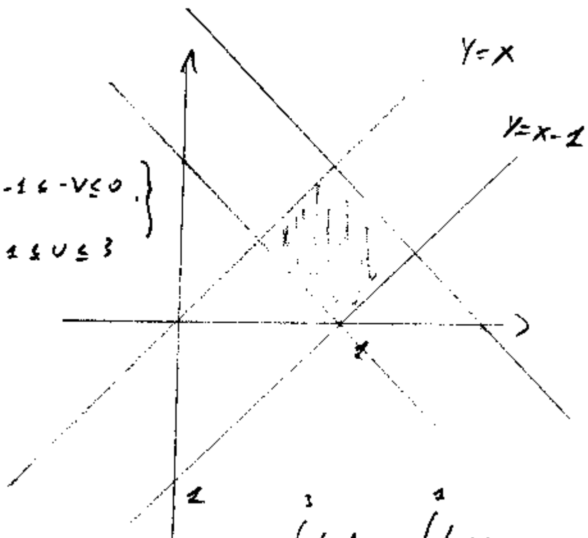
Coordinate (u,v)

$\{ -1 \le y-x \le 0 , \; 1 \le y+x \le 3 \}$

$\Phi^{-1}(E) = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le -v \le 0 , \; 1 \le u \le 3 \}$

$0 \le v \le 1$

$\Phi^{-1} : \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \iff \Phi \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$



diffeomorfismo (è lineare e invertibile)

$\left|\det J_\Phi(u,v)\right| = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \iint_E (x-y)\log(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_1^3 du \log(u) \int_0^1 dv\, v =$

$= \frac{1}{2}\left(\log(u)\cdot u - u\right)\Big|_1^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\log(3) - 1$

$$\Psi^{-1}(E) = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} -1 \le -v \le 0, \quad 1 \le u \le 3 \\ 0 \le v \le 1 \end{array} \right\}$$

$$\iint_E (x-y)\log(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_1^3 du\,\log(u)\int_0^1 dv\,v = \frac{1}{2}\left(u\log u - u\right)\Big|_1^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(\log 3 - 1)$$

4 Esempi $\Longrightarrow$ ALTRA LEZIONE

(a) $\displaystyle\iiint_E \frac{z-3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz \qquad E=\left\{(x,y,z) \mid 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le 3-\sqrt{9-x^2-y^2}\right.$

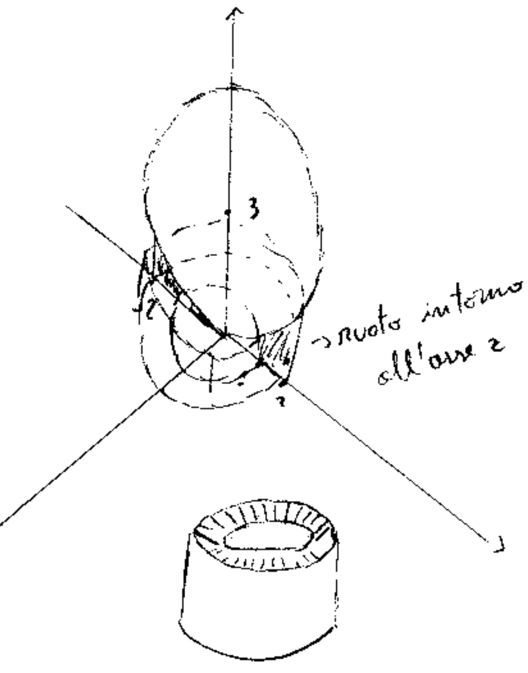
$x=0 \quad 1\le y^2\le 4 \iff 1\le |y|\le 2 \qquad 0\le z\le 3-\sqrt{9-y^2}$

$z-3\le -\sqrt{9-y^2} \qquad (z-3)^2\ge 9-y^2$

$z\le 3$

Coordinate cilindriche

$\Phi\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z\end{cases} \qquad \det J_\Phi=\rho$



$\Phi^{-1}(E)=\left\{(\rho,\theta,z) \mid 1\le\rho^2\le 4 \quad 0\le z\le 3-\sqrt{9-\rho^2}\right\}=$

$=\left\{(\rho,\theta,z) \mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 1\le\rho\le 2,\ 0\le z\le 3-\sqrt{1-\rho^2}\right\}$

normale rispetto a (ρ,θ)

$$\iiint_E \frac{z-3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz=\iiint_{\Phi^{-1}(E)}\frac{z-3}{\rho}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 d\rho\int_0^{3-\sqrt{1-\rho^2}}(z-3)\,dz=$$

$$=2\pi\int_1^2 d\rho\,\frac{(z-3)^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=3-\sqrt{1-\rho^2}}=\pi\int_1^2\left(\frac{9}{2}-\rho^2\right)d\rho=\pi\left(9-\frac{7}{3}\right)$$

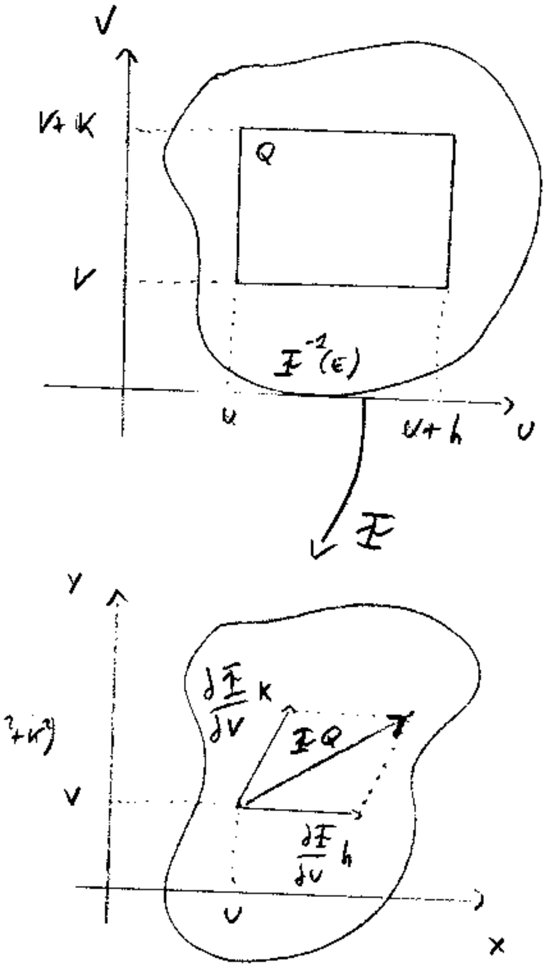
1 | 11/10/2019

$\Phi : A \to B$ diffeomorfismo

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u,v))\,|\det J_\Phi(u,v)|\,du\,dv$$

$\forall E \subset B$ misurabile

$f : E \to \mathbb{R}$ continua



$$(x,y) := \Phi(u,v)$$

$$\Phi(u+h,v) = \Phi(u,v) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v)h + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) =$$

$$= (x,y) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v)h + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

$$\Phi(u,v+k) = (x,y) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

$$\Phi(u+h,v+k) = (x,y) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v)h + \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial v}k + o(h^2+k^2)$$

$$\overbrace{|\Phi(Q)|}^{\text{area parallelogramma } \Phi(Q)} = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}h & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\cdot k \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}h & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}k \end{pmatrix}\right| + o(h^2+k^2) =$$

$$= |\det J_\Phi(u,v)|\cdot \overbrace{|h\cdot k|}^{\text{area rettangolo } Q} + o(h^2+k^2) = |\det J_\Phi(u,v)|\cdot|Q| + o(h^2+k^2)$$

$$\iint_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u,v))\,|\det J_\Phi(u,v)|\,du\,dv \simeq \sum_{i,j} f(\Phi(u_{ij},v_{ij}))\,|\det J_\Phi(u_{ij},v_{ij})|\,|Q_{ij}|$$

$$\cong \sum_{ij} f_{ij}(x_{ij},y_{ij})\,|\Phi(Q_{ij})| \cong \iint_E f(x,y)\,dx\,dy,$$

simile a somma di Riemann ma con parallelogrammi ma per parallelog. molto piccoli si possono considerare uguali a rettangoli.

Un diffeomorfismo trasforma un rettangolo in un parallelogramma.

INTEGRALI TRIPLI

parallelepipedo

$Q = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \subset \mathbb{R}^3$

Suddivisione di Q : $D = D_1 \times D_2 \times D_3 \to$ di $[e,f]$

D_1: suddivisione di $[a,b]$; D_2: di $[c,d]$

$\{ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \}$

$f : Q \to \mathbb{R}$ limitata

$Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ $\qquad M_{ijk} = \sup\limits_{Q_{ijk}} f$

$|Q_{ijk}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$ $\qquad m_{ijk} = \inf\limits_{Q_{ijk}} f$

$\downarrow$ volume o misura di Q

$S(D,f) := \sum\limits_{ijk} M_{ijk} |Q_{ijk}|$ $\qquad s(D,f) := \sum\limits_{ijk} m_{ijk} |Q_{ijk}|$

f sia integrabile in Q se $\sup\limits_{D} s(D,f) = \inf\limits_{D} S(D,f) = \iiint\limits_{Q} f$

$E \subset \mathbb{R}^3$ insieme limitato

$f : E \to \mathbb{R}$ limitata si dice integrabile su E se la funzione

$$\bar{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{altrimenti } \in Q \setminus E \end{cases}$$

è integrabile su Q

e si pone $\iiint\limits_{E} f := \iiint\limits_{Q} \bar{f}$

Integrali Tripli

parallelepipedo

$Q = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \subset \mathbb{R}^3$

Suddivisione di Q : $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3 \to$ di $[e,f]$

suddivisione di $[a,b]$ — di $[c,d]$

$\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

$f : Q \to \mathbb{R}$ limitata

$Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ $\qquad M_{ijk} = \sup\limits_{Q_{ijk}} f$

$|Q_{ijk}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$ $\qquad m_{ijk} = \inf\limits_{Q_{ijk}} f$

$\downarrow$

volume o misura di Q

$S(\mathcal{D}, f) := \sum\limits_{ijk} M_{ijk} |Q_{ijk}|$ $\qquad s(\mathcal{D}, f) := \sum\limits_{ijk} m_{ijk} |Q_{ijk}|$

f sia integrabile in Q se $\sup\limits_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf\limits_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) = \iiint\limits_Q f$

$E \subset \mathbb{R}^3$ insieme limitato

$f : E \to \mathbb{R}$ limitata si dice integrabile su E se la funzione

$$\bar{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{altrimenti } \in Q \setminus E \end{cases}$$

è integrabile su Q

e si pone $\iiint\limits_E f := \iiint\limits_Q \bar{f}$

$E \subset \mathbb{R}^3$ limitato si dice misurabile se χ_E (funzione caratteristica di E) è integrabile, e si pone $|E| := \iiint_Q \chi_E = \iiint_E 1$ volume di E

E misurabile $\iff |\partial E| = 0$. Se E è misurabile e $f: E \to \mathbb{R}$ è continua e limitata $\Rightarrow$ f è integrabile.

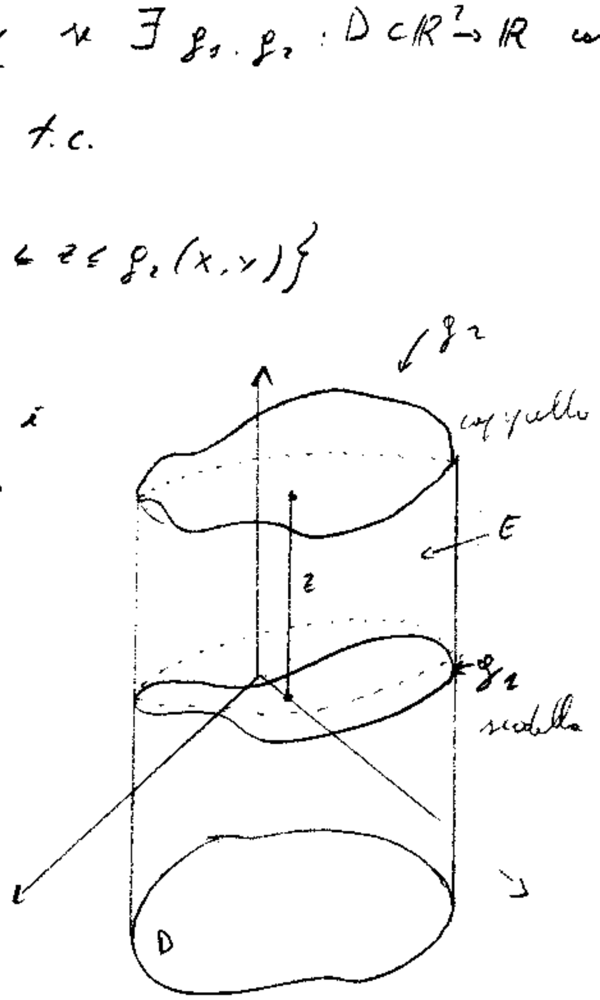
DEF: INSIEME NORMALE in $\mathbb{R}^3$

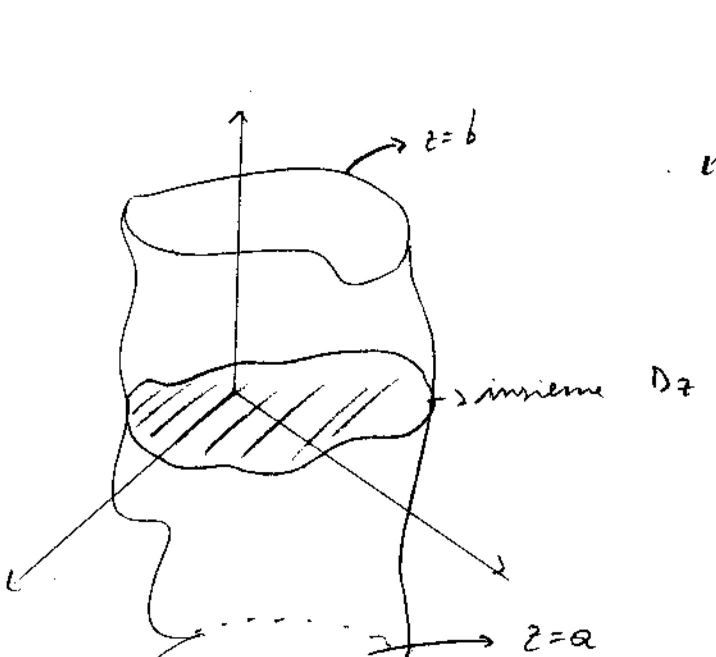
(i) $E \subset \mathbb{R}^3$ è normale rispetto al piano x,y se $\exists\, f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$ misurabile e f_1, f_2 integrabile t.c.

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \text{ e } f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$$

(ii) $E \subset \mathbb{R}^3$ è normale rispetto all'asse z se è misurabile e se esistono insiemi misurabili in $D_z \subset \mathbb{R}^2$, $z \in [a,b]$ t.c.

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a,b),\ (x,y) \in D_z\}$$





sezione cambia sempre forma al variare di z.

Esempio

$$B=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$$

$$\Updownarrow$$

$$z^2 \le r^2-x^2-y^2 \iff -\sqrt{r^2-x^2-y^2} \le z \le +\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

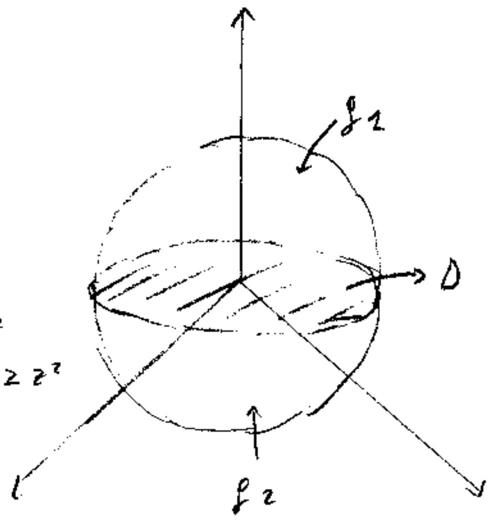
$$\Rightarrow r^2-x^2-y^2 \ge 0 \quad r^2 \ge x^2+y^2$$

$$B=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le r^2,\ \underbrace{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}_{g_1(x,y)} \le z \le \underbrace{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}_{g_2(x,y)}\}$$

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le r^2\}$ misurabile

$g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$ continue $\Rightarrow$ integrabili

$\Rightarrow B$ è normale rispetto a xy.



oppure

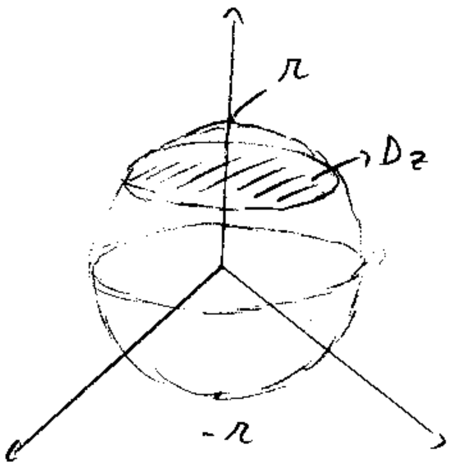
$x^2+y^2+z^2 \le r^2 \iff x^2+y^2 \le r^2-z^2$

$-r \le z \le r \longleftarrow$ deve essere per forza $r^2-z^2 \ge 0$ perciò $r^2 \ge z^2$

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in[-r,r],\ x^2+y^2\le r^2-z^2\}$$

$D_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le r^2-z^2\}$ misurabile $\forall z\in[-r,r]$

normale rispetto a z



31 | Teorema | (formule di riduzione per integrali tripli)

(i) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$

insieme normale rispetto al piano (x,y)

$f: E \to \mathbb{R}$ continua allora : $\displaystyle\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$.

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER FILI

(ii) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [a,b],\ (x,y) \in D_z\}$ normale rispetto l'asse z

$f: E \to \mathbb{R}$ continua e limitata allora :

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \left[\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right]$$

FORMULE DI INTEGRAZIONE PER STRATI.

Esempi:

(a)
$$\iiint_E y\,dx\,dy\,dz = \iint_D dy\,dz \int_{g_1}^{g_2} y\,dx$$

$E = \{(x,y,z) \mid y^2+z^2 \le 1,\ \underbrace{-(y^2+z^2)}_{g_1} \le x \le \underbrace{\sin(yz)+1}_{g_2}\}$

$D = \{(x,y) \mid y^2+z^2 \le 1\}$

$\Rightarrow \ldots = \displaystyle\iint_D dy\,dz\,[\underbrace{y\sin(yz)}_{\text{dispari rispetto a } z} + \underbrace{y(1+y^2+z^2)}_{\text{dispari rispetto } y}] = 0$

E è normale rispetto a $(y\,z)$

D invariante per $y \to -y$ e per $z \to -z$

(b) Volume di $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le 1,\ \frac{x^2}{(2-z)^2}+\frac{y^2}{(2+z)^2}\le 1\right\}$

$D_z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{(2-z)^2}+\frac{y^2}{(2+z)^2}\le 1\right\}$ Ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi $2-z$, $2+z$

$$|E| = \iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{D_z} 1\,dx\,dy = \int_0^1 dz\,|D_z| =$$

$D=\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$

coordinate ellittiche:
$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\,d\rho\,ab =$$

$$\det J_\Phi = \det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho ab \neq 0$$

$$= ab\,2\pi\,\frac{1}{2} = \pi ab$$

$$\Phi^{-1}(D) = \left\{(\rho,\theta) \mid \frac{a^2\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\theta}{b^2} = \rho^2\le 1\right\} =$$

$$\Downarrow$$

$$= \left\{(\rho,\theta) \mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1\right\}$$

$$\int_0^1 dz\,|D_z| = \int_0^1 \pi(2-z)(2+z) =$$

$$= \pi\int_0^1 (4-z^2)\,dz = \pi\left(4-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}\pi$$

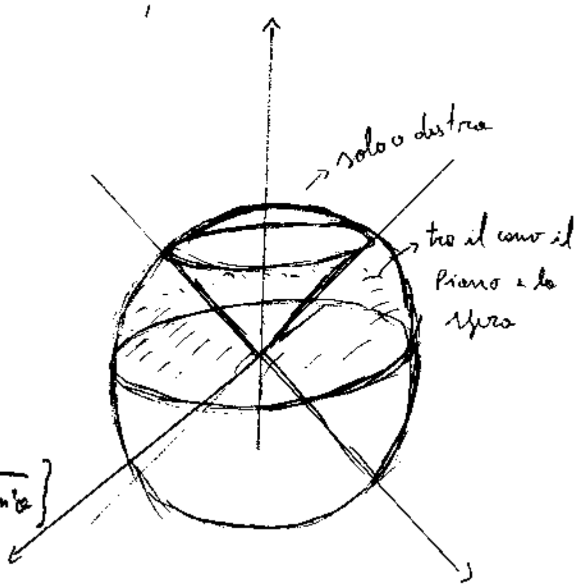
Teo.	Cambiamento Variabili negli integrali tripli.

$A, B\subset\mathbb{R}^3$ aperti, $\Phi: A\to B$ diffeomorfismo, $E\subset B$ misurabile e $f: E\to\mathbb{R}$ continua, allora
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u,v,w))\,|\det J_\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

1| 13/11/19

$$\iiint_E \log\left(1+\sqrt{x^2+z^2+y^2}\right)dx\,dy\,dz \qquad E=\left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\le 0,\ 0\le z\le \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

Coordinate sferiche:



$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \left|\det J_{\Phi}(\rho,\theta,\varphi)\right| = \rho^2\sin\theta$$

$\rho\in[0,+\infty)$, $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$

$$\Phi^{-1}_{(E)}=\left\{(\rho,\theta,\varphi) \mid \rho^2\le 4,\ \rho\sin\theta\cos\varphi\le 0,\ 0\le\rho\cos\theta\le\sqrt{\rho^2\sin^2\theta}\right\}$$

$\Updownarrow$ $\boxed{0\le\rho\le 2}$

$0\le \rho\cos\theta\le\rho\sin\theta \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}}$

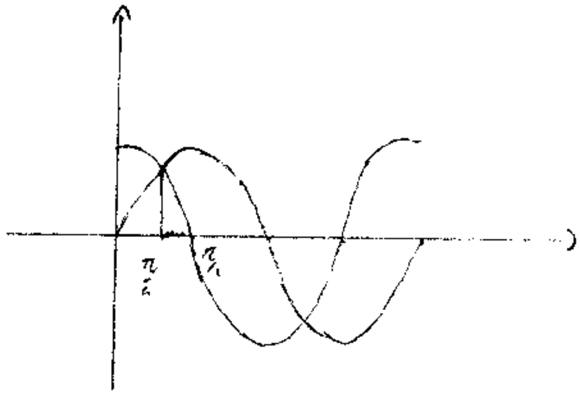
$\rho\sin\theta\cos\varphi\le 0$

$\Updownarrow$

$\cos\varphi\le 0$

$\Updownarrow$

$\boxed{\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3}{2}\pi}$



$$\iiint f(x,y,z)=\int_{\pi/2}^{3/2\pi}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int_0^2 d\rho\ \log(1+\rho)\rho^2\sin\theta = \pi\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\left\{\left[\frac{\rho^3}{3}\log(1+\rho)\right]_0^2 -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\int_0^2 d\rho\ \frac{\rho^3}{1+\rho}\right\} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left\{\frac{8}{3}\log 3-\frac{1}{3}\int_0^2 d\rho\ \frac{(\rho+1-1)^3}{\rho+1}\right. = \int_0^2 d\rho\ \frac{(\rho+1)^3-3(\rho+1)^2+3(\rho+1)-1}{\rho+1} =$$

$$=\left[\frac{(\rho+1)^3}{3}-\frac{3(\rho+1)^2}{2}+3\rho-\log(\rho+1)\right]_0^2$$

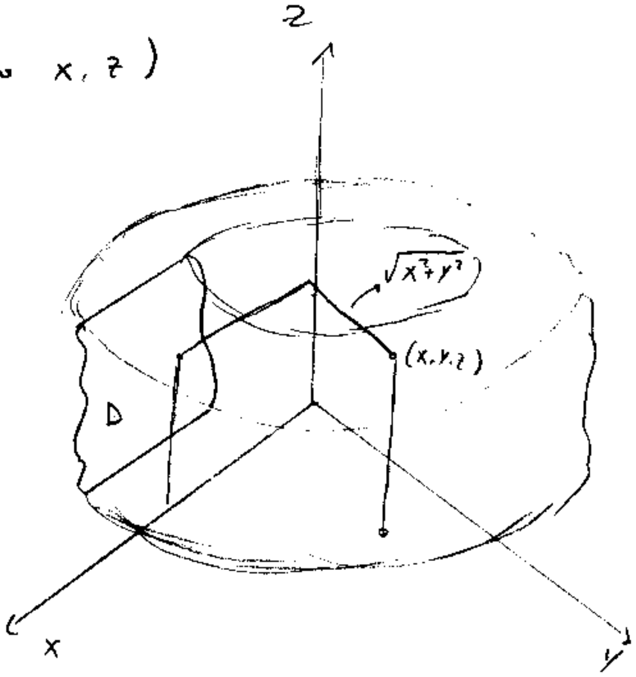
Dato $E \subset \mathbb{R}^3$ misurabile il suo baricentro è il punto di coordinata

$$\bar{x} = \frac{1}{|E|} \iiint x \, dx\,dy\,dz \qquad \bar{y} = \frac{1}{|E|} \iiint y \, dx\,dy\,dz \qquad \bar{z} = \frac{1}{|E|} \iiint z \, dx\,dy\,dz$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ misurabile (sottoinsieme del piano x, z)

$E = \{(x,y,z) \mid (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in D\}$

in coordinate cilindriche



$\Phi^{-1}(E) = \{(\rho, \theta, z) \mid (\rho, z) \in D, \ \theta \in [0, 2\pi]\}$

normale rispetto a θ

$|E| = \iiint dx\,dy\,dz =$

$$= \iiint_{\Phi^{-1}(E)} \rho \, d\theta \, d\rho \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_D \rho \, d\rho \, dz = \overset{(?)}{\frac{2\pi}{|D|} \iint_D x \, dx\,dz} \cdot |D| = \boxed{2\pi \bar{x} |D|}$$

TEOREMA	DI PAPPO - GULDINO

Il volume di un solido di rotazione è uguale all'area della regione piana che lo genera moltiplicato per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro.

Osservazioni:
- Il teorema vale se l'insieme D che genera il solido di rotazione soddisfa: $D \subset \{(x,z) \mid x \geq 0\}$
- Se D è normale rispetto a z: $D = \{(x,z) \mid z \in [a,b], \ g_1(z) \leq x \leq g_2(z)\}$

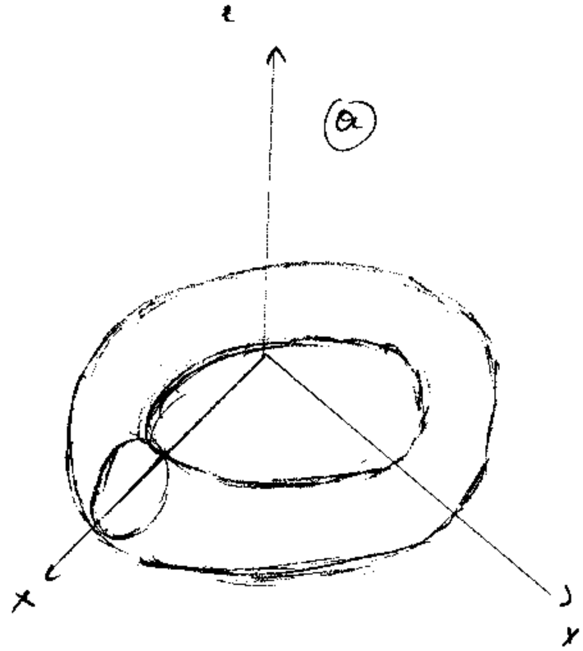
$$|E| = 2\pi \bar{x} |D| = 2\pi \iint_D x \, dx\,dz = 2\pi \int_a^b dz \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} x \, dx = \pi \int_a^b dz \left(g_2(z)^2 - g_1(z)^2\right)$$

2 Esempi

(a) $D = \{(x, z) \mid (y-R)^2 + z^2 \le \rho^2\}$ TOROIDE

Il toro è $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \le \rho^2\}$,

$|T| = 2\pi \bar{x} \, |D| = 2\pi^2 \rho^2 \bar{x} = 2\pi^2 \rho^2 R$



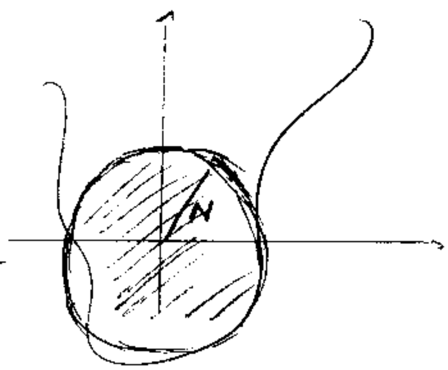
(b) $D = \{(x,z) \mid x \ge 0, \; x^2 + z^2 \le \rho^2\}$

$E = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le \rho^2\}$

$|E| = \frac{4}{3}\pi\rho^3 = 2\pi \bar{x} \, \frac{\pi\rho^2}{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{4\rho}{3\pi}$

| Def. | Insiemi misurabili non limitati |

$E \subset \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ illimitato si dice misurabile se $\forall N \in \mathbb{N}$ l'insieme $E \cap B_N(0)$ è misurabile e la sua misura è $|E| = \lim_{N \to +\infty} |E \cap B_N(0)|$



$E \cap B_N(0) \subset E \cap B_{N+1}(0) \Rightarrow$ la successione $\{|E \cap B_N(0)|\}_{N \in \mathbb{N}}$ è crescente $\Rightarrow$ il limite esiste

$\mathcal{M}_E = \{D \subset \mathbb{R}^n \mid D \subset E$ ed è limitato e misurabile$\}$

Prop. $|E| = \sup_{D \in \mathcal{M}_E} |D|$

DIM. (Hp)

$D \in \mathcal{M}_E \Rightarrow D$ è limitato $\Rightarrow \exists N$ t.c. $D \subset B_N(0) \cap E \Rightarrow |D| \le |B_N(0)\cap E| \le |E|$

$\sup\limits_{D\in\mathcal{M}_E} |D| \le |E|$ Sia $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists N$ t.c. $|E\cap B_N(0)| > |E| - \varepsilon$

$\underset{\uparrow}{E\cap B_N(0)} \in \mathcal{M}_E \Rightarrow \sup\limits_{D\in \mathcal{M}_E}|D| \ge |E\cap B_N(0)| \ge |E|-\varepsilon \Rightarrow \sup\limits_{D\in\mathcal{M}_E} |D| \ge |E|$ assurdo.

limitato, misurabile e $\subset E$

DEF. Sommabile o Assolutamente Integrabile

$E\subset\mathbb{R}^n$ misurabile (anche non limitato) e $f:E\to\mathbb{R}$ (anche non limitata) generalmente continua. Posto: $\mathcal{D}_f := \{D\in\mathcal{M}_E \mid f \text{ è continua e limitata su } D\}$

la funzione f si dice sommabile (o assolutamente integrabile in senso improprio) se: $\sup\limits_{D\in\mathcal{D}_f}\int_D |f| < +\infty$

Se f è positiva ($f\ge 0$) si pone $\int_E f := \sup\limits_{D\in\mathcal{D}_f}\int_D f$

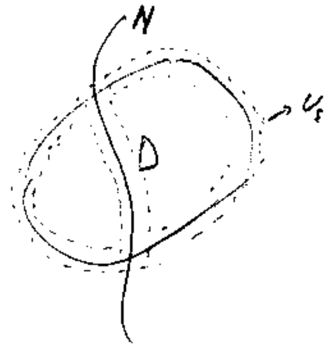
Teorema del Confronto

$E\subset\mathbb{R}^n$ misurabile, $f,g: E\to\mathbb{R}$ generalmente continue e $f,g\ge 0$

e tali che $f(\underline{x})\le g(\underline{x})$ $\forall \overset{\text{vettori}}{\underline{x}} \in E$

Se g è sommabile $\Rightarrow f$ è sommabile e $\int_E f \le \int_E g$

3 | $\boxed{\text{DIM}}$



Sia $D \in \mathcal{D}_f$

Sia $N \subset E$ t.c. $|N|=0$ e f è continua su $E\setminus N$ (di g)

$$\int_D f = \int_{D\cap N} \overset{=0}{f} + \int_{D\setminus N} f$$

$$D = (D\cap N)\cup(D\setminus N)$$

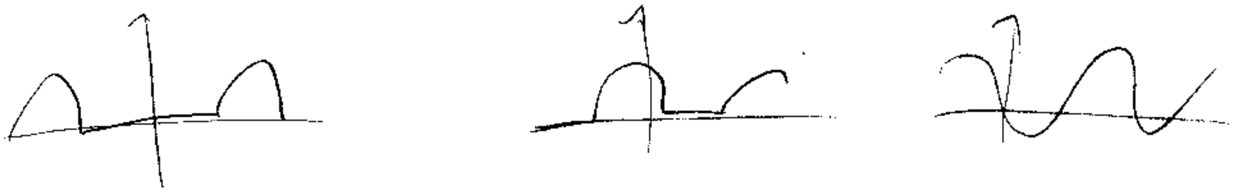
dato $\varepsilon>0$ $\exists\, U_\varepsilon$ aperto t.c. $N\cup\partial D\subset U_\varepsilon$ e $|U_\varepsilon| < \dfrac{\varepsilon}{\sup_D f}$

$D\cap U_\varepsilon^c = \bar{D}\cap U_\varepsilon^c$ è compatto (chiuso e limitato) e f è continua su $D\cap U_\varepsilon^c$ e g è continua su $D\cap U_\varepsilon^c \Rightarrow$ è limitata

$$\int_D f = \int_{D\setminus N} f = \int_{D\cap U_\varepsilon^c} f + \int_{U_\varepsilon\cap D} f \le \int_{D\cap U_\varepsilon^c} f + \sup_D f\, \underbrace{|U_\varepsilon\cap D|}_{< \frac{\varepsilon}{\sup_D f}} \le \int_{D\cap U_\varepsilon^c} g + \varepsilon \le$$

$$\le \int_E g + \varepsilon \Rightarrow \sup_{D\in\mathcal{D}_f}\int_D f \le \int_E g + \varepsilon < +\infty$$

$$\int_E f = \sup_{D\in\mathcal{D}_f}\int_D f \le \int_E g$$



$0 \leq f_{\pm}(x) \leq |f(x)| \qquad f(x) = f_+(x) - f_-(x)$

Def Integrale di una funzione sommabile

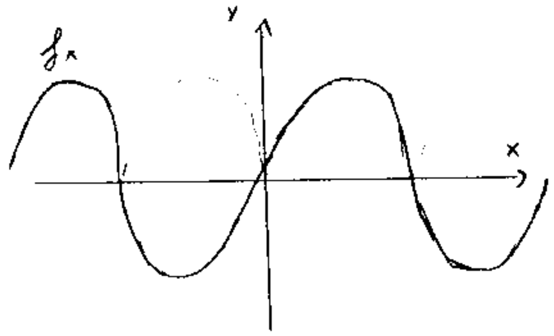
$f: E \to \mathbb{R}$ generel. continua e sommabile l'integrale di f su E è $\int_E f = \int_E f_+ - \int_E f_-$

Se f è sommabile $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto}}}{\Rightarrow} 0 \leq \int_E f_\pm \leq \int_E |f| < +\infty$

Stessa Def. se almeno uno dei due $\int_E f_\pm$ è finito

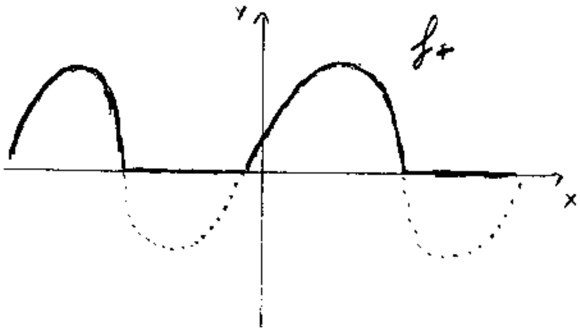
Data $f: E \to \mathbb{R}$ la sua parte positiva e parte negativa sono:

$$f_\pm(x) := \frac{1}{2}\left(|f(x)| \pm f(x)\right)$$



$f(x) \geq 0 \Rightarrow f_+(x) = f(x)$ e $f_-(x) = 0$

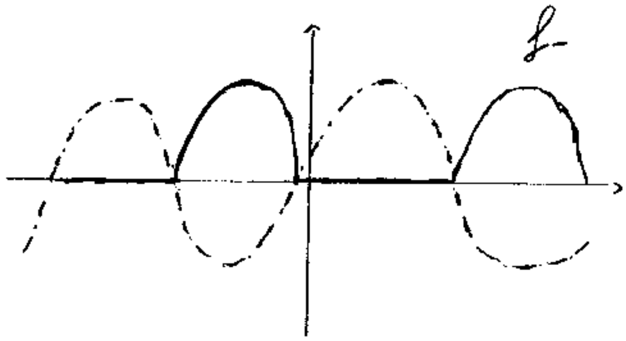
$f(x) \leq 0 \Rightarrow f_+(x) = 0 \quad f_-(x) = -f(x)$



$$0 \leq f_\pm(x) \leq |f(x)|$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

DEF.	INTEGRALE DI UNA FUNZIONE SOMMABILE



$f: E \to \mathbb{R}$ generalmente continua e sommabile, l'integrale di f su E è:

$$\int_E f = \int_E f_+ - \int_E f_-$$

Se f è sommabile $\Rightarrow 0 \leq \int_E f_\pm \leq \int_E |f| < +\infty$

Confronto

Stessa Definizione: se almeno uno dei due $\int_E f_+$ o $\int_E f_-$ è finito.

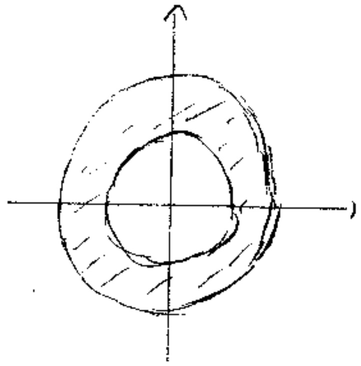
1 | 14/11/19

(141)

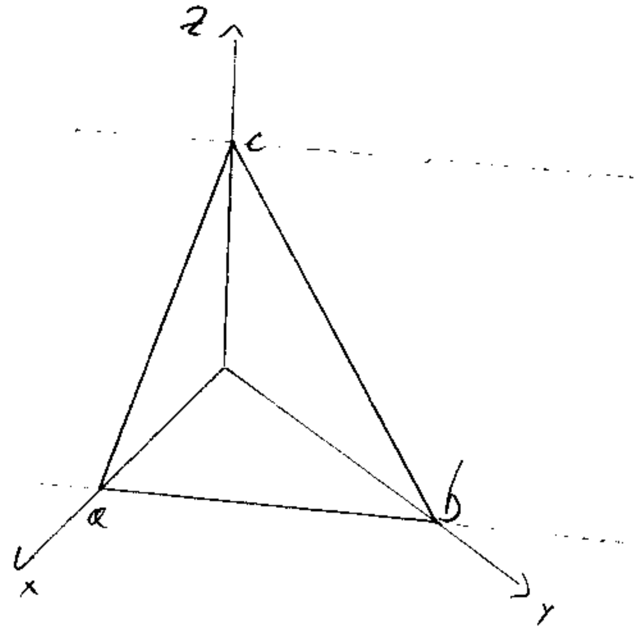
Il teorema di Pappo-Guldino vale se l'insieme D che genera il solido di rotazione soddisfa: $D \subset \{(x,z) \mid x \geq 0\}$

. Se D è normale rispetto a z : $D = \{(x,z) \mid z \in [a,b]\ g_1(z) \leq x \leq g_2(z)\}$

$$|E| = 2\pi \bar{x} |D| = 2\pi \iint_D x\,dx\,dz = 2\pi \int_a^b dz \int_{g_1(z)}^{g_2} x\,dx = \pi \int_a^b dz \left(g_2(z)^2 - g_1(z)^2\right) =$$



Correzione Esercizi 13/11/19



Piano individuato da a, b, c.

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha \cdot a + 1 = 0 \qquad \alpha = -\frac{1}{a}$$

$$\beta = -\frac{1}{b}$$

$$\gamma = -\frac{1}{c}$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \qquad E = \left\{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1\right\}$$

Normale rispetto al piano (x, y).

$$\Updownarrow$$

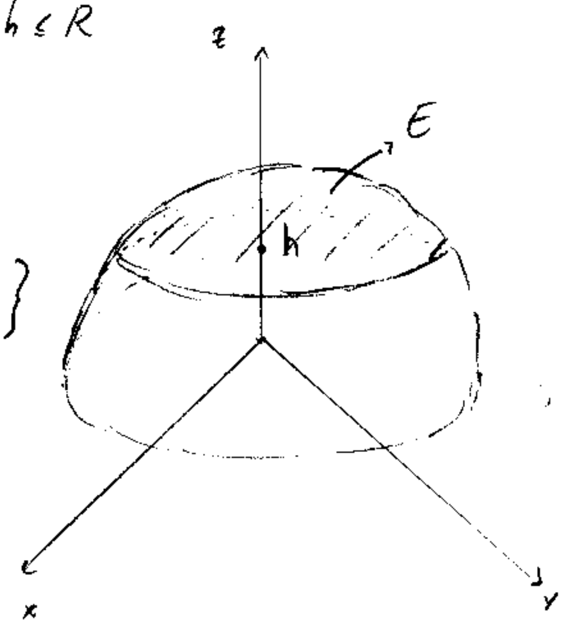
$$\boxed{0 \leq z \leq \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)c}$$

$$1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \geq 0 \iff \boxed{0 \leq y \leq b\left(1 - \frac{x}{a}\right)} \iff \boxed{0 \leq x \leq a}$$

$$E = \left\{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\left(1 - \frac{x}{a}\right),\ 0 \leq z \leq c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\right\}$$

$$|E| = \int_0^a dx \int_0^{(1-\frac{x}{a})b} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dz = \dots = \frac{abc}{6}$$

$E = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge h\} \qquad 0 \le h \le R$



Coordinate Cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\theta,z) \mid \rho^2+z^2 \le R^2,\ z \ge h\}$$

$\hookrightarrow h \le z \le R$

normale rispetto a z.

$$|E| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_h^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} d\rho \cdot \overset{J}{\rho} =$$

1| 18/11/19

$E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, $f: E \to \mathbb{R}$ generalmente continua se $f \geq 0$

$\left\lceil \int_E f := \sup_{D \in \mathcal{D}_f} \int_D f \in [0, +\infty) \right\rceil$ se $f \geq 0$,

se f cambia segno, f è sommabile se $\int_E |f| < +\infty$

e in questo caso:

$$\int_E f := \int_E f_+ - \int_E f_- \quad \left(f \text{ sommabile} \Rightarrow f_\pm \text{ sommabili} \right)$$

$\boxed{\text{TEO.}}$

$E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, $f: E \to \mathbb{R}$ generalmente continua e <u>sommabile</u>.

Allora per ogni successione $\{D_n\} \subset \mathcal{D}_f$ t.c.

è crescente

(i) $D_n \subset D_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\forall D \in \mathcal{D}_f \quad D \subset D_n$ definitivamente $\left(\exists N \text{ t.c. } \forall n > N \ D \subset D_n \right)$

$$\left\lceil \int_E f := \lim_{n \to +\infty} \int_{D_n} f \right\rfloor$$

$\boxed{\text{DIM.:}}$

dimostrare che è uguale al $\lim_{n \to \infty} \int_{D_n} f$

Basta dimostrarlo per $f \geq 0 \Rightarrow \int_E f = \sup_{D \in \mathcal{D}_f} \int_D f$

Sia $\{D_n\} \subset \mathcal{D}_f$ come nell'enunciato.

$$\int_{D_n} f \leq \sup_{D \in \mathcal{D}_f} \int_D f = \int_E f \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_{D_n} f \le \int_E f}$$

$\exists$ perché la successione $\{\int_{D_n} f\}$ è crescente

Ora dimostriamo la disuguaglianza opposta

Dato $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists D\in\mathcal{D}_f$ t.c. $\int_D f \ge \int_E f-\varepsilon \Rightarrow$ uso la proprietà (ii)

$\Rightarrow D\subset D_n$ definitivamente $\Rightarrow \int_D f \le \int_{D_n} f \le \lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f \ge \int_E f-\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0 \Rightarrow$ mando ε a zero $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f \ge \int_E f}$ Lo stesso vale per $f\ge 0$ e $\int_E f=+\infty$

■

$\{D_n\}\subset\mathcal{D}_f$ che gode di (i) e (ii)

1) $\lim_{n\to\infty}\int_{D_n}|f| = \int_E |f| \in [0,+\infty]$

2) (i) $\int_E |f| = +\infty \Rightarrow f$ non è sommabile

(ii) $\int_E |f| < +\infty$ (è finito) $\Rightarrow \int_E f = \lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f$

2| Esempi:

(a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$ → insieme non limitato, misurabile ⇒

⇒ $\mathbb{R}^2 \cap B_N(0) = B_N(0)$ misurabile $\forall N \in \mathbb{N}$

Dobbiamo trovare una successione.

f è continua su $\mathbb{R}^2$ ⇒ tutte le Hp verificate.

Crescente e contiene ogni insieme illimitato misurabile

f è limitata ⇒ $0 \le f(x,y) \le 1$

$D_f = \{$tutti i sottoinsiemi limitati e misurabili di $\mathbb{R}^2\}$

La successione può essere la palla $D_n = B_n(0,0)$ ⇒ $\{D_n\}$ soddisfa (i), (ii)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_n(0,0)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \overset{\text{c.p.}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n d\rho\,\rho\,e^{-\rho^2} = \lim_{n\to\infty} 2\pi\,\frac{1}{2}\left[-e^{-\rho^2}\right]_0^n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \pi\left(1-e^{-n^2}\right) \Rightarrow = \pi$$ funzione è sommabile.

$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ è sommabile su $\mathbb{R}^2$ e $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi$.

In questo caso abbiamo usato solo il passo (i) poiché il modulo della f = a f.

Invece di sfere potevamo prendere quadrati $Q_n = [-n,n]\times[-n,n]$ ⇒

⇒ $\{Q_n\} \subset D_f$ soddisfa (i) e (ii) ⇒ $\pi = \lim_{n\to\infty}\iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$

sono uguali

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} dy \int_{-n}^{n} dx\, e^{-(x^2+y^2)} = \int_{-n}^{n} dy\, e^{-y^2}\int_{-n}^{n} dx\, e^{-x^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = \pi^{3/2}$$

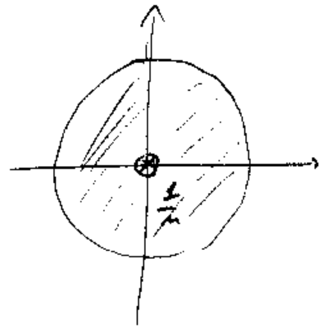
(b) $f(\underline{x}) = \dfrac{1}{\|\underline{x}\|^{\alpha}}$ $\quad \underline{x} \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \quad n = 2, 3$

$B_1(0)$ è limitato e misurabile

$f(\underline{x})$ è continua in $B_1(0) \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ è generalmente continua ma non limitata $\Rightarrow$ non possiamo utilizzare le formule di riduzione.

Sia $D_n = B_1(0) \setminus \mathring{B}_{\left(\frac{1}{n}\right)}(0) =$

$= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{1}{n} \le \|\underline{x}\| \le 1 \right\}$ soddisfano (i) e (ii)



$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} \frac{1}{\|x\|^{\alpha}}\,dx \overset{n=2}{=} \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \overset{c.p.}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{1} d\rho\, \rho \cdot \frac{1}{\rho^{\alpha}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \int_{1/n}^{1} \rho^{-\alpha+1}\,d\rho = \lim_{n\to\infty} 2\pi \begin{cases} \left[\log \rho\right]_{1/n}^{1} & \alpha = 2 \\ \left[\frac{1}{2-\alpha}\,\rho^{2-\alpha}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} & \alpha \neq 2 \end{cases} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \begin{cases} \log n & \alpha = 2 \\ \frac{1}{2-\alpha}\left(1 - \frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) & \alpha \neq 2 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \alpha \ge 2 \\ \frac{1}{2-\alpha} & \alpha < 2 \end{cases}$$ unica soluzione

$f(x) = \dfrac{1}{|x|^{\alpha}}$ è impropriamente integrabile in $[-1, 1]$ $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$

$f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ è sommabile in $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha < 2$

3] $m=3$

(147)

coord. sferiche

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{D_n} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_{1/n}^{1} d\rho\, \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho^\alpha} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{1/n}^{1} \rho^{2-\alpha} d\rho = \lim_{n\to\infty} 4\pi \int_{1/n}^{1} \rho^{2-\alpha} d\rho = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \left.\log\rho\right]_{1/n}^{1} & \alpha=3 \\ \frac{1}{3-\alpha}\left[\rho^{3-\alpha}\right]_{1/n}^{1} & \alpha\neq 3 \end{cases}$$

Stesso risultato di prima

(C) $f(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|^\alpha}$ $\quad D_1 = \{\underline{x}\in\mathbb{R}^m \mid \|\underline{x}\|>1\}$ illimitato e misurabile

f è continua e limitata su D_1 $\quad 0\le f(x)\le 1$

$D_n \{\underline{x}\in\mathbb{R}^m \mid 1\le\|x\|\le n\}$

$m=2$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\, dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^n d\rho\, \rho^{1-\alpha} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \begin{cases} \log(n) & \alpha=2 \\ \frac{1}{2-\alpha}\left(n^{2-\alpha}-1\right) & \alpha\neq 2 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \alpha\le 2 \\ \frac{2\pi}{\alpha-2} & \alpha>2 \end{cases}$$

$m=3$ $\quad \begin{cases} +\infty & \alpha\le 3 \\ \frac{4\pi}{\alpha-3} & \alpha>3 \end{cases}$ $\qquad f(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|^\alpha}$ è sommabile all'infinito in $\mathbb{R}^m$

$\iff \alpha>m$

Def

Una curva (parametrica) è una funzione continua

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Il suo sostegno è $|\gamma| = \gamma(I) = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$

Una curva è <u>chiusa</u> se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$

" " è <u>semplice</u> se è iniettiva in $\mathring{I}$ (cioè se $t_1, t_2 \in \mathring{I}$,

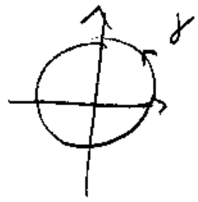
$t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$)

Esempi:

(a) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi] \iff \gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

$\gamma(0) = \gamma(2\pi) \Rightarrow \gamma$ è chiusa

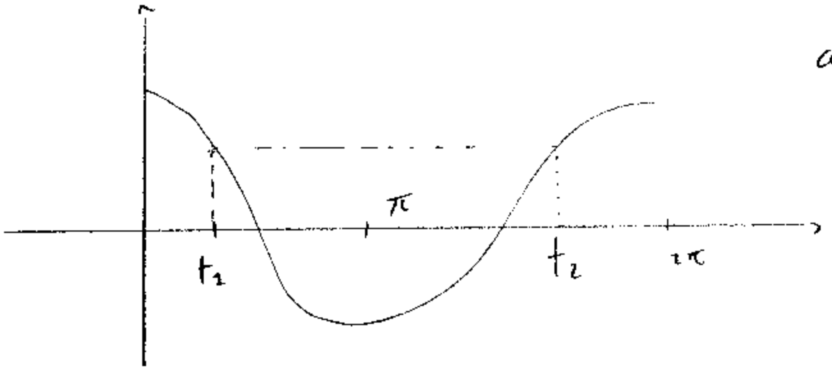
$t_1, t_2 \in (0, 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases} \Rightarrow \gamma$ è semplice $\rightarrow$



(b) $\gamma(t) = (\cos t, \sin(2t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(2\pi) \Rightarrow$ è chiusa

$t_1, t_2 \in (0, 2\pi) \quad \begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin 2t_1 = \sin 2t_2 \end{cases}$ $\nexists$ soluzioni non banali (cioè non $t_1 = t_2$)



$\cos t_1 = \cos t_2 \iff t_2 = 2\pi - t_1$

$\Downarrow$

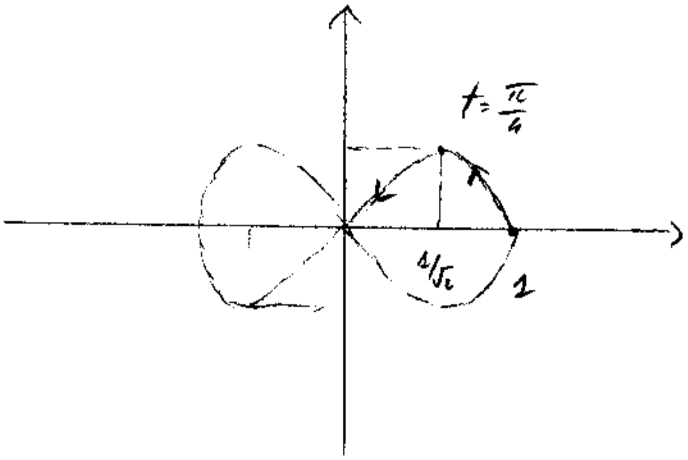
sostituiamo in seno

4 $\sin(2t_2) = \sin(4\pi - 2t_1) = \sin(-2t_1) = -\sin(2t_1) = 0$ → unica soluzione (149)

$\Rightarrow 2t_1 = \pi, 3\pi$ — $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \frac{3}{2}\pi$; $t_1 = \frac{3}{2}\pi$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$,

$\left(2t_1 \in (0, 4\pi) \right)$

$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,0) = \gamma\left(\frac{3}{2}\pi\right) \Rightarrow$ γ non è semplice



$\gamma(0) = (1,0)$

$\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,0)$

$\gamma\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$

$\gamma(\pi) = (-1,0)$

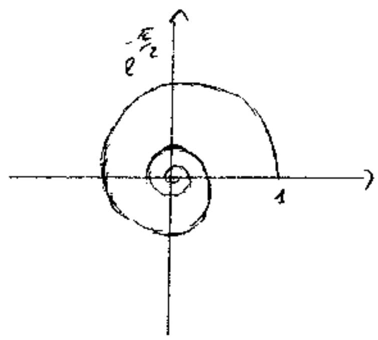
DEF.

Una curva cartesiana è una curva piana della forma $\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ o viceversa, il suo sostegno è il grafico di f.

DEF

Una curva polare è una curva piana definita dall'equazione della forma $\rho = f(\theta)$ $\theta \in I$ in coordinate polari, cioè

$$\gamma: \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

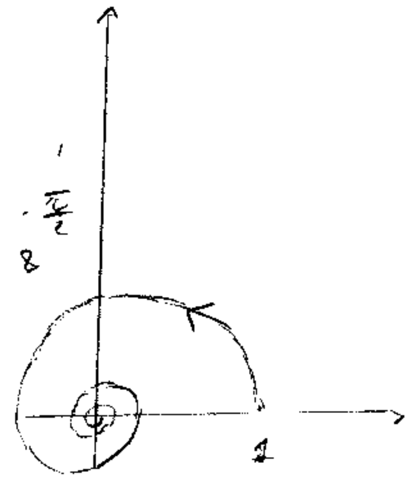


Esempio

$\rho = e^{-\theta}$ $\theta \geq 0$

Esempio

$\rho = e^{-\theta} \qquad \theta \geq 0$



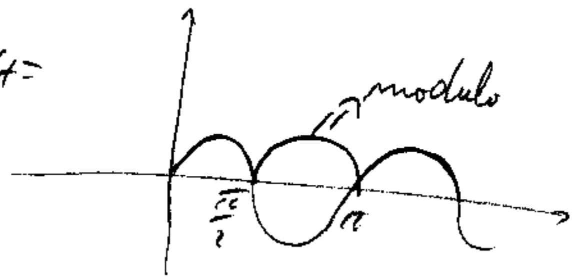
(b) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ $t \in [0, 2\pi]$ $C^1 \Rightarrow$ rettificabile

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)\| = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} =$$

$$= 3\sqrt{\cos^2 t \cos^2 t \sin^2 t + \sin^2 t \cos^2 t \sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)} = 3\,|\cos t \sin t|$$

$$L(\gamma) = 3\int_0^{2\pi} |\cos t \sin t|\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,dt =$$

$$= -6\cos(2t)\Big|_0^{\pi/2} = -6(-1-1) = 12$$



$$\le \frac{\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\|}{t_k-t_{k-1}} + \frac{1}{t_k-t_{k-1}}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overbrace{\|\gamma'(s)-\gamma'(t)\|}^{<\varepsilon}\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| \le \frac{\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\|}{t_k-t_{k-1}} + \varepsilon \qquad \forall\, t\in[t_{k-1},t_k]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow}$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|\gamma'(t)\|\,dt \le \|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\| + \varepsilon(t_k-t_{k-1})$$

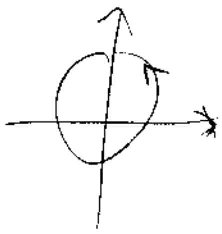
$$\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt = \sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|\gamma'(t)\|\,dt \le \sum_{k=1}^{m}\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\| + \varepsilon\underbrace{\sum_{k=1}^{m}(t_k-t_{k-1})}_{b-a} =$$

$$= L(D,\gamma)+\varepsilon(b-a) \le L(\gamma)+\varepsilon(b-a) \underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} \int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt \le L(\gamma)$$

Esempi:

(a) $\gamma(t)=(\rho\cos t, \rho\sin t) \quad t\in[0,2\pi] \quad \rho>0 \quad$ è $C^1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow L(\gamma)=\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi}\|(-\rho\sin t, \rho\cos t)\|\,dt =$$



$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2\sin^2 t+\rho^2\cos^2 t}\,dt = \rho\int_0^{2\pi}dt = 2\pi\rho$$

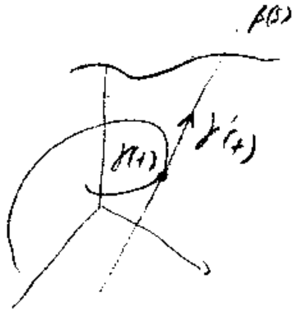
$\Rightarrow$ Continua Gira Pagina

1| 20/11/19

DEF. | CURVA REGOLARE

Una curva γ si dice regolare se è di Classe C^1 e $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

La retta tangente a γ in $\gamma(t)$ è la curva $\beta(s) = \gamma(t) + s\,\gamma'(t) \quad s \in \mathbb{R}$



Esempi:

(a) $\gamma(t) = (t^3, t^2) \quad t \in \mathbb{R}$

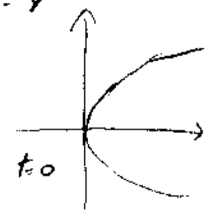
$\gamma'(t) = (3t^2, 2t) = (0,0) \iff t = 0 \implies \gamma$ non è regolare

$$\gamma: \begin{cases} x = t^3 \implies t = x^{1/3} \\ y = t^2 \quad \searrow \quad y = x^{2/3} \end{cases}$$

(b) $\gamma(t) = (t^6, t^3) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

non regolare $\quad \gamma'(t) = (6t^5, 3t^2) = (0,0) \iff t = 0$

$$\gamma: \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^3 \end{cases} \iff x = y^2$$



$\tilde{\gamma}(t) = (t^2, t) \quad \tilde{\gamma}'(t) = (2t, 1) \neq (0,0) \quad \forall t \in \mathbb{R} \to$ regolare

DEF: | CURVE EQUIVALENTI

Due curve $\beta: J \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ si dicono equivalenti se

$\exists\, \varphi: I \to J$ biunivoca, continua, e con inversa continua (omeomorfismo)

t.c. $\gamma(t) = \beta(\varphi(t))$

φ è detto cambiamento di parametro.

γ, β equivalenti $\implies$ hanno lo stesso sostegno.

Esempio:

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$ $\qquad$ $\underline{\alpha, \beta, \gamma \text{ equivalenti}}$

$\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$

$$\underset{(\cos t, \sin t)}{\alpha(t)} = \beta(\varphi(t)) = \cos(2\varphi(t)), \sin(2\varphi(t)) = (\cos t, \sin t)$$

$$\Updownarrow$$

omeomorfismo

$$2\varphi(t) = t \iff \varphi(t) = \frac{t}{2} \qquad \varphi : [0, \pi] \to [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

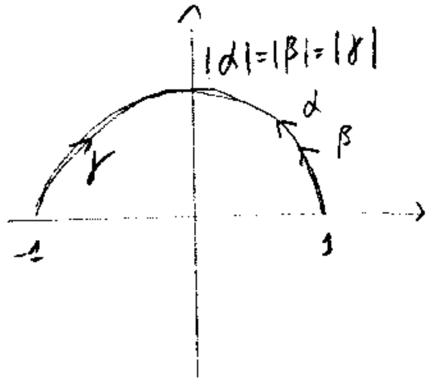
$\exists ? \ \psi : [0, \pi] \to [-1, 1]$ omeomorfismo t.c.

$$\alpha(t) = \gamma(\psi(t)) \Rightarrow (\cos t, \sin t) = (\psi(t), \sqrt{1 - \psi(t)^2})$$

$$\Updownarrow$$

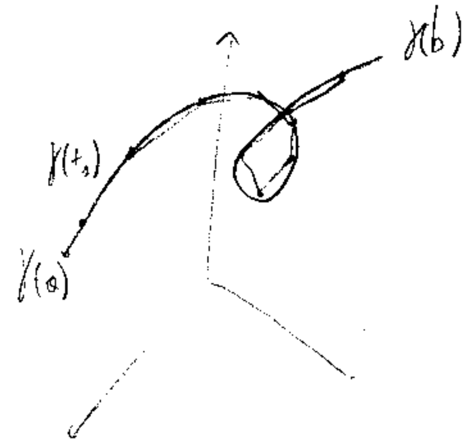
$$\psi(t) = \cos t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - \psi(t)^2} = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = |\sin t| = \sin t$$

$t \in [0, \pi]$



α, β percorrono la curva in senso antiorario. inducono la stessa orientazione del loro sostegno mentre γ induce l'orientazione opposta.

DEF. | LUNGHEZZA DI UNA CURVA, CURVA RETTIFICABILE



$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curva

Prendiamo D suddivisione: $\{a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b\}$ suddivisione di $[a, b]$

$\underline{L(D, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}$ lunghezza della spezzata di vertici $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \ldots \gamma(t_n)$

La curva γ si dice rettificabile se $L(\gamma) = \sup_{D} L(D, \gamma) < +\infty$

$L(\gamma)$ si dice la lunghezza di γ

PROPOSIZIONE

β e γ curve equivalenti e rettificabili $\Rightarrow$ $L(\beta) = L(\gamma)$

dim $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\beta\ [c,d] \to \mathbb{R}^n$ $\quad \exists\, \varphi : [a,b] \to [c,d]$ omeomorfismo

t.c. $\gamma(t) = \beta(\varphi(t)) \quad \forall\, t \in [a,b]$

$D = \{a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b\}$ sia φ strettamente crescente $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{E} = \{c = \varphi(a) = s_0 < s_1 = \varphi(t_1) < s_2 = \varphi(t_2) < \ldots\ s_n = \varphi(t_n) = d\}$

è una suddivisione di $[c,d]$

$$L(D, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \| = \sum_{i=1}^{n} \| \beta(s_i) - \beta(s_{i-1}) \| = L(\mathcal{E}, \beta) \le L(\beta)$$

$\gamma(t_i) = \beta(\varphi(t_i)) = \beta(s_i)$

$L(\gamma) = \sup_{D} L(D, \gamma) \le L(\beta)$

invertendo i ruoli di γ e β si ottiene

$L(\beta) \le L(\gamma) \Rightarrow L(\beta) = L(\gamma)$

TEO.

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 $\Rightarrow$ γ è rettificabile e $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$

LEMMA

$\beta\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (vettore) curva continua, posto $\int_a^b \beta(t)\,dt := \left(\int_a^b \beta_1(t)\,dt, \int_a^b \beta_2(t)\,dt \ldots \int_a^b \beta_n(t)\,dt \right)$ (componenti del vettore)

si ha $\quad \left\| \int_a^b \beta(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \| \beta(t) \|\, dt$

$$L(\gamma) = \sup_{D} L(D, \gamma) \qquad L(D,\gamma) = \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)\,dt \right\| \overset{\text{Lemma}}{\leq} \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \Rightarrow L(\gamma) = \sup L(D,\gamma) \leq$$

$$\leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \qquad \gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^n \text{ è continua} \Rightarrow \gamma' \text{ è unif. continua}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } |s - t| < \delta \Rightarrow \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \varepsilon$$

Sia $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ t.c. $|t_k - t_{k-1}| < \delta \quad \forall k = 1 \dots n$

$$t \in [t_{k-1}, t_k] \quad , \qquad \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(s)\,ds =$$

$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\gamma'(s) - \gamma'(t)]\,ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)\,ds$$

$$\underbrace{\int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)\,ds}_{=\,\gamma'(t)(t_k - t_{k-1})} = \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\gamma'(s) - \gamma'(t)]\,ds$$

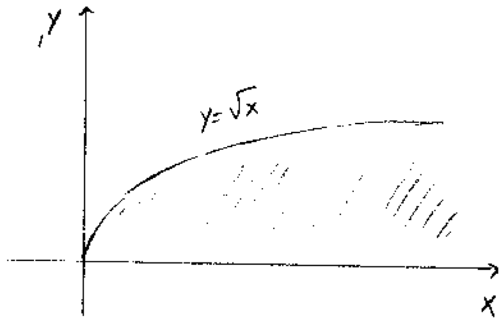
$$\|\gamma'(t)\| = \left\| \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} - \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\gamma'(s) - \gamma'(t)]\,ds \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}{t_k - t_{k-1}} + \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\gamma'(s) - \gamma'(t)]\,ds \right\| \leq$$

1| Correzione Integrali Impropri del 18/11/13

ESERCIZI

1) $f(x,y) = 2y e^{-x} \cos(x+y^2)$ $\qquad D = \{ x \geq y^2,\ y \geq 0 \}$ Studiare la Sommabilità.



(a) Considerazioni su f e su D.

- D è illimitato
- f è continua in D

(b) f è sommabile $\iff \int_D |f| < +\infty$

$\boxed{ba}$ A volte non è necessario, basta maggiorare la funzione con una della quale conosciamo il comportamento.

$$0 \leq \left| 2y e^{-x} \cos(x+y^2) \right| \leq 2y e^{-x} \Rightarrow \iint_D 2y e^{-x}\, dx\, dy$$

(c) Trovare una successione e riscrivere D in funzione di n. D_n deve godere delle 2 proprietà del teorema:

$$D_n = \{ (x,y) \mid y^2 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq \sqrt{n} \}$$

(i) $D_n \subset D_{n+1}$ ✓

(ii) $\{D_n\} \subset D_f$ t.c. $\forall D \in D_f$, $D \subset D_n$ definitivamente ($\exists N$ t.c. $\forall n \geq N$ $D \subset D_n$)

(d) $\displaystyle\iint_D 2y e^{-x}\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} 2y e^{-x}\, dx\, dy$

Svolgimento:

$$\lim_{n\to\infty} 2\int_0^{\sqrt{n}} dy\, y \int_{y^2}^{n} e^{-x}\, dx = \lim_{n\to\infty} 2\int_0^{\sqrt{n}} dy\, y \cdot \left[-e^{-x} \right]_{y^2}^{n} = \lim_{n\to\infty} 2\int_0^{\sqrt{n}} dy\, (e^{-y^2} - e^{-n}) =$$

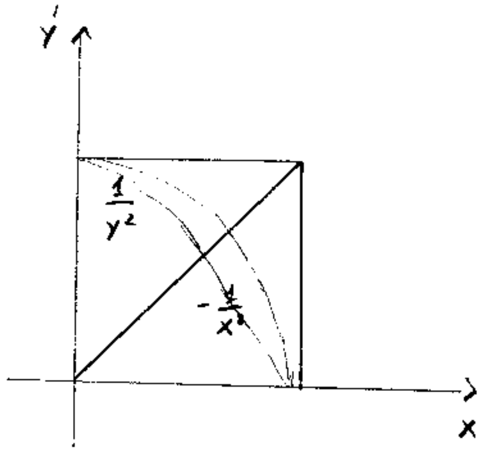
$$= \begin{matrix} t = y^2 \\ dt = 2y\, dy \end{matrix} = \int_0^{n} dt\, (e^{-t} - e^{-n}) = \lim_{n\to\infty} \left[-e^{-t} \right]_0^{n} - e^{-n} n = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n} - e^{-n} n) = 1$$

$t = (0)^2 = 0$

$t = (\sqrt{n})^2 = n$

$\Downarrow$ $g(x,y) = 2y e^{-x}$ è sommabile in D $\underset{\text{confronto}}{\Rightarrow}$ f è sommabile in D

2)
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{y^2} & 0\le x\le y\le 1 \\ -\frac{1}{x^2} & 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & 0\le x=y\le 1 \end{cases} \qquad D=[0,1]\times[0,1]$$



(a). f è non limitata e generalmente continua

. D chiuso e limitato.

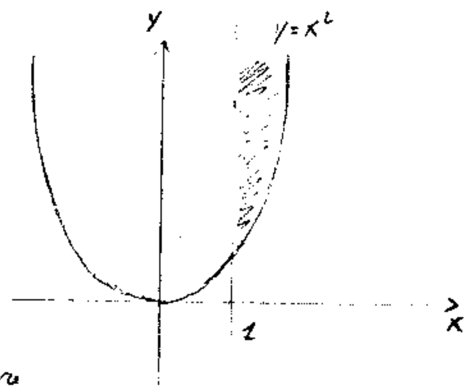
$\boxed{\text{ba}}$ Cerco di maggiorare la funzione

$$|f(x,y)|=\begin{cases} \frac{1}{y^2} & 0\le x\le y\le 1 \\ \frac{1}{x^2} & 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & 0\le x=y\le 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y^2}\ge\frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow \iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}\ge\iint_{D\cap B_1(0,0)}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}=+\infty \quad \text{non è sommabile}$$

??

3) $f(x,y)=\frac{1}{x^4+y^2}$ $\qquad D=\{(x,y)\mid x\ge 1,\ y\ge x^2\}$



(a) f continua e limitata , D non limitata

(c) $D_n=\{1\le x\le n,\quad x^2\le y\le n^2\}$

C'è un motivo in particolare sul perché n^2 e non n?

(d) $$\iint_{D_n}\frac{dx\,dy}{x^4+y^2}=\int_1^n dx\int_{x^2}^{n^2}\frac{dy}{x^4+y^2}=\int_1^n dx\int_{x^2}^{n^2}\frac{dy}{x^4\left(1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2\right)}\overset{\left[t=\frac{y}{x^2}\right]}{=}\int_1^n\frac{dx}{x^2}\int_1^{n^2/x^2}\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int_1^n\frac{dx}{x^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{n^2}{x^2}-\frac{\pi}{4}\right)=\int_1^n\frac{dx}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{n^2}{x^2}+\left[\frac{\pi}{4x}\right]_1^n=\int_1^n\frac{dx}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{n^2}{x^2}+\left(\frac{\pi}{4n}-\frac{\pi}{4}\right)\le$$

$-\frac{\pi}{2}\le\operatorname{arctg}\le\frac{\pi}{2}$

$$\le\frac{\pi}{2}\int_1^n\frac{dx}{x^2}+\left(\frac{\pi}{4n}-\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{\pi}{2}\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\le+\infty \quad \text{sommabile} \;\blacksquare$$

2

4) $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \underbrace{\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}}_{} + \iint_{\{x^2+y^2\ge 1\}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} < \infty$$

∞ ∞ (b)

$*$

(a) f è continua e limitata
D limitato

(a) Sommabile in $x^2+y^2\ge 1$ perché
$$\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} \le \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

?

(c) $D_m \, \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le m^2\} \to$ è tutto $\mathbb{R}^2$

$$(d) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)} = \lim_{m\to\infty} \iint_{D_m} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} \overset{CP}{=} \lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^m d\rho \, \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} = \quad t = 1+\rho^2,\ dt = 2\rho\, d\rho$$

$$= \lim_{m\to\infty} 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_1^{1+m^2} \frac{dt}{t^2} = \lim_{m\to\infty} \pi \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{1+m^2} = \lim_{m\to\infty} \pi\left(1 - \frac{1}{1+m^2}\right) = \pi$$

5) $$\iint_D \frac{x^2 \log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dx\,dy \qquad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$$

(a) $\dfrac{x^2 \log(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \le 0 \quad \forall (x,y) \in D$ D non è limitato.

? SOMMABILE

(b) $$|f(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2} |\log(x^2+y^2)| \le |\log(x^2+y^2)| \le \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2\alpha}}$$

(c) $D_m = \left\{ \frac{1}{m^2} \le x^2+y^2 \le 1 \right\}$

(d) $$\lim_{m\to\infty} \iint_{D_m} \frac{x^2 \log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dx\,dy = \lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/m^2}^{1} d\rho\, \rho\, \frac{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta \log(\rho^2)}{\cancel{\rho^2}} \le \rho \log(\rho^2)$$

$t = \rho^2$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_{1/m^2}^{1} dt \log t = \lim_{m\to\infty} \frac{\pi}{2} \left[t(\log(t) - 1)\right]_{1/m^2}^{1} = \lim_{m\to\infty} \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{m^2}\left(\log\frac{1}{m^2} - 1\right) - 1\right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{m^2} \log\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2} - 1\right] = -\frac{\pi}{2}$$

4 | Esempio

$F(x,y) = (xy, y) \qquad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle = \int_0^{2\pi} \left[(\cos t \sin t)(-\sin t) + \sin t \cos t \right] dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \sin t) \cos t \, dt =$$

$$\left[-\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$ non sufficiente a dire che è conservativo

$\gamma_2(t) = (2 + \cos t, \sin t)$

$$\int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle = \int_0^{2\pi} \left[-(2+\cos t)^2 \sin t + \sin t \cos t \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-2\sin^2 t - \cancel{\sin^2 t \cos t} + \cancel{\sin t \cos t} \right] dt = -2\pi \neq 0 \Rightarrow$$ F non è conservativo.

$\boxed{\Rightarrow}$

1| 25/11/19

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1

$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) \Rightarrow \nabla f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale.

DEF.	CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO E FUNZIONE POTENZIALE

Un campo vettoriale $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (D aperto) campo vettoriale continuo, si dice conservativo se $\exists\ f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $F = \nabla f$ con f di classe C^1

f si dice un potenziale (o una primitiva) di F.

ESEMPIO:

(a) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad F(x,y) = (3x^2, -y)$ è conservativo?

g è funzione derivabile arbitraria

$\exists\ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \Rightarrow \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -y \end{cases}$ $\begin{cases} f(x,y) = \int 3x^2 dx = x^3 + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(y) = -y \Rightarrow \end{cases}$

numero reale

$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = x^3 - \frac{y^2}{2} + c \\ g(y) = -\frac{y^2}{2} + c \end{cases} \Rightarrow$ tutte $f(x,y)$ potenziali di F. $\Rightarrow F$ è conservativo.

(b) $F(x,y) = (3x^2, -xy)$ $\quad F$ è conservativo?

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = x^3 + \underbrace{g(y)}_{\text{solo } f \text{ di } y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) = -xy \end{cases} \Rightarrow \Big\{ F$ non conservativa.

ma questa dipende sia da x che da y.

Una forma differenziale è un'espressione del tipo:

$$\omega(\underline{x}) = F_1(\underline{x})\,dx_1 + F_2(\underline{x})\,dx_2 + \dots F_n(\underline{x})\,dx_n \quad \text{con } F_j : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

funzioni continue.

c'è una corrispondenza biunivoca $\omega \longleftrightarrow F = (F_1 \dots F_n)$

F è conservativo, $F = \nabla f \iff \omega = \sum_{j=1}^{n} F_j\,dx_j$ è esatta.

$$F_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \Rightarrow \omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx_j = df$$

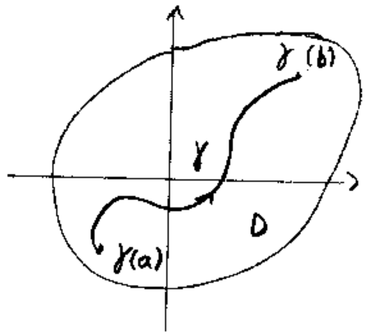
ω è esatta è differenziale di una funzione scalare

DEF. | INTEGRALE DI UN CAMPO VETTORIALE SULLA CURVA | o integrale curvilineo.

$F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva C^1 t.c. $|\gamma| \subset D$ (il suo sostegno)

$$\int_\gamma \langle F \cdot ds \rangle := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\,dt$$

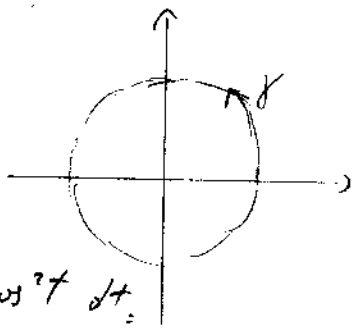
Lavoro di F su γ



Esempio.

$F(x,y) = (xy, -x) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \; t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma \langle F, ds \rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t) \rangle\,dt =$$



$$= \int_0^{2\pi} \left[(\cos t \sin t)(-\sin t) + (-\cos t)\cos t \right] dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t \cos t - \cos^2 t\,dt =$$

$$= -\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi} - \pi = -\pi$$

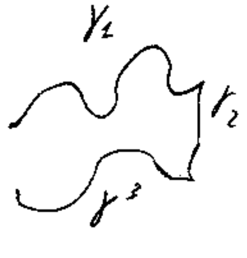
DEF. CURVA C^1 A TRATTI:

Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è C^1 a tratti se $\exists\ a = t_0 < t_1 \dots < t_n = b$ t.c.

la restrizione di γ all'intervallo $[t_{k-1}, t_k]$ è di classe C_1

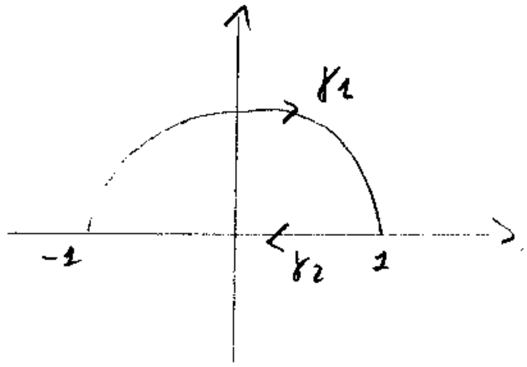
In tal caso si pone $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ $k=1 \dots n$ e si scrive

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$



Esempio:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, \sqrt{1-t^2}) & t \in [-1,1] \\ (2-t, 0) & t \in [1,3] \end{cases}$$



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ è di classe C^1 a tratti

$\gamma_1 = \gamma|_{[-1,1]}$ $\quad \gamma_2 = \gamma|_{[1,3]}$ $\quad$ Se $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_n$ è C^1 a tratti

$$\int_\gamma \langle F, ds \rangle = \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle + \int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle + \dots + \int_{\gamma_n} \langle F, ds \rangle$$

Sia $F = \nabla f$ un campo conservativo

$$\int_\gamma \langle F, ds \rangle = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \overset{\text{REGOLA PER LA CATENA}}{=}$$

$$\int_a^b \left[\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right] dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$$\boxed{\int_\gamma \langle F, ds \rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$ → Teorema fondamentale del calcolo.

2\] Se $\omega = \sum_{j=1}^{m} F_j\, dx_j$ $\qquad \int_\gamma \omega := \int_\gamma \langle F, ds \rangle$

$\boxed{\text{Prop:}}$ γ e β curve C^1 equivalenti (con cambiamento di parametro diffeomorfismo) allora $\int_\gamma \langle F, ds \rangle = \int_\beta \langle F, ds \rangle$ se γ e β hanno la stessa orientazione (stesso punto iniziale e finale), oppure $\int_\gamma \langle F, ds \rangle = -\int_\beta \langle F, ds \rangle$ se hanno orientazione opposta.

$\boxed{\text{Dim}}$ $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m \qquad \beta : [c,d] \to \mathbb{R}^m$

$\exists\ \varphi : [a,b] \to [c,d]$ biunivoca, C^1 con inversa C^1 t.c.

$\gamma(t) = \beta(\varphi(t)) \quad \forall\, t \in [a,b]$

γ e β stesso orientazione $\Rightarrow \varphi'(t) > 0 \quad \forall\, t \in [a,b] \quad \varphi(a) = c,\ \varphi(b) = d$

variabile di β, come t per γ

$$\int_\beta \langle F, ds \rangle = \int_c^d \langle F(\beta(v)), \beta'(v) \rangle\, dv = (v = \varphi(t)) = \int_a^b \langle F(\underbrace{\beta(\varphi(t))}_{\gamma(t)}), \beta'(\varphi(t)) \rangle\, \varphi'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \underbrace{\beta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)}_{\gamma'(t)} \rangle\, dt = \int_\gamma \langle F, ds \rangle$$

Se γ e β hanno orientazione opposta allora $\varphi(a) = d \quad \varphi(b) = c$

$$\int_\beta \langle F, ds \rangle = \int_b^a \text{uguale a prima} = -\int_\gamma \langle F, ds \rangle$$

3) Se F è conservativo $\int_\gamma \langle F, ds\rangle$ dipende solo dai punti iniziali e finali

TEO. DEFINIZIONI EQUIVALENTI DI CAMPO CONSERVATIVO

$D \subset \mathbb{R}^n$ è aperto connesso $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ campo vettoriale continuo

Sono Equivalenti:

(i) F è conservativo, l'integrale chiuso di uno F conservativo è zero

(ii) Per ogni curva chiusa γ C^1 a tratti t.c. $|\gamma| \subset D \Rightarrow \int_\gamma \langle F, ds\rangle = 0$

(iii) $\forall$ coppia di curve γ e β C^1 a tratti, t.c. $|\gamma|, |\beta| \subset D$ con stessi punti iniziali e finali $\Rightarrow \int_\gamma \langle F, ds\rangle = \int_\beta \langle F, ds\rangle$ ↳ l'integrale non dipende dalla curva percorsa ma solo dal punto iniziale e finale.

DIM.

<u>(i) ⇒ (ii)</u> F conservativo $\Rightarrow F = \nabla f$

$$\Downarrow$$

$$\int_\gamma \langle F, ds\rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \underset{\uparrow}{=} 0$$

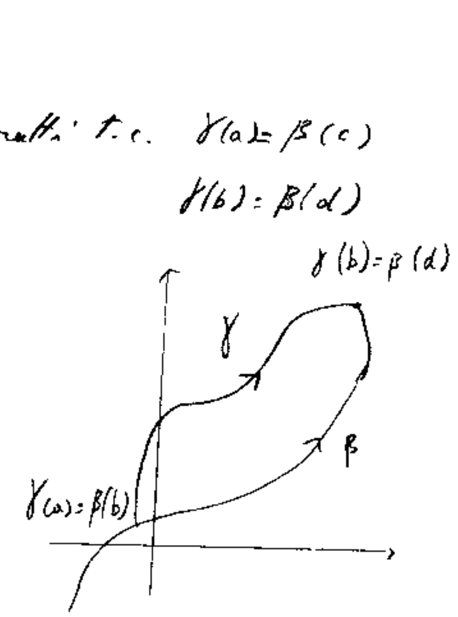
γ chiuso $\Leftrightarrow \gamma(b) = \gamma(a)$

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\beta: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ curve C^1 a tratti t.c. $\gamma(a) = \beta(c)$
$\gamma(b) = \beta(d)$

definiamo $\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \in [a,b] \\ \beta(b+d-t) & t \in [b, b+d-t] \end{cases}$

curva a tratti chiusa C^1



$\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a)$ $\tilde{\gamma}(b+d-c) = \beta(c) = \gamma(a)$

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} \langle F, ds\rangle = \int_\gamma \langle F, ds\rangle - \int_\beta \langle F, ds\rangle$$

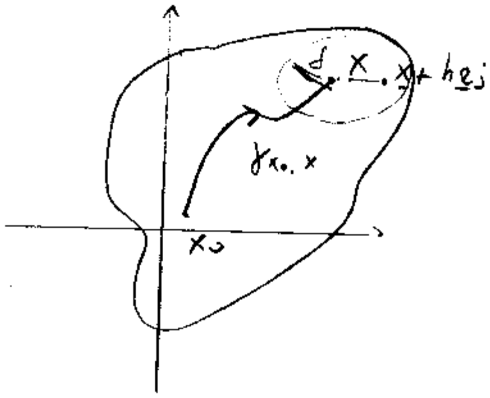
→ curva tra $\beta(b+d-t)$ è equivalente a β con orientazione opposta

(iii) => (i)

Fissiamo un punto $x_0 \in D \overset{D \text{ connesso}}{\Rightarrow} \forall x \in D$

$\exists \gamma_{x_0,x} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ C^1 a tratti t.c. $|\gamma_{x_0,x}| \subset D$ $\gamma_{x_0,x}(0) = x_0$, $\gamma_{x_0,x}(1) = x$

definiamo $f(x) := \int_{\gamma_{x_0,x}} \langle F, ds \rangle$



Per hp. f dipende solo da $x \in D$ (e non da tutta la curva $\gamma_{x_0,x}$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x} + h\underline{e}_j) - f(\underline{x})}{h} \overset{(?)}{=} F_j(\underline{x}) \quad \forall j = 1 \dots n$$

$\underline{x} \in D$ aperto $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. $B_\delta(\underline{x}) \subset D$

$$\gamma_{x_0, x+he_j}(t) = \begin{cases} \gamma_{x_0,x}(t) & t \in [0,1] \\ x + (t-1)he_j & t \in [1,2] \end{cases}$$

$$f(x+he_j) = \int_{\gamma_{x_0,x+he_j}} \langle F, ds \rangle = \overbrace{\int_{\gamma_{x_0,x}} \langle F, ds \rangle}^{f(x)} + \int_1^2 \langle F(x+(t-1)he_j), he_j \rangle \, dt =$$

$$= \frac{f(x+he_j) - f(x)}{h} = \frac{1}{\cancel{h}} \int_1^2 \langle F(\underline{x} + (t-1)h\underline{e}_j), \cancel{h} e_j \rangle \, dt =$$

$$= \int_1^2 F_j(\underline{x} + (t-1)h\underline{e}_j) \, dt \overset{\text{Teorema della media}}{=} \exists \bar{t} \in [1,2] \Rightarrow \lim_{h \to 0} \int_1^2 F_j(\underline{x} + (t-1)he_j) \, dt =$$

$$= \lim_{h \to 0} F_j(x + (\bar{t}-1)h\underline{e}_j) \underset{F_j \text{ è cont.}}{=} F_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j} = F_j$$

$F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conservativo $\quad D \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso

Se $f: D \to \mathbb{R}^n$ è una primitiva $\Rightarrow g = f + c$, $c \in \mathbb{R}$ è una primitiva

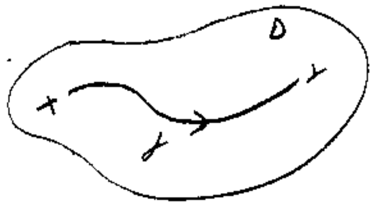
$\nabla g = \nabla(f+c) = \nabla f = F$

se $f, g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono primitive $\Rightarrow \nabla\underbrace{(f-g)}_{h} = \nabla f - \nabla g = F - F = 0$

$x, y \in D \Rightarrow \exists$ curva in D t.c. $\gamma(0) = x \quad \gamma(1) = y \Rightarrow$

D connesso $\quad \gamma[0,1] \to D$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt} h(\gamma(t)) = \langle \nabla h(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$



$h(x) = h(\gamma(0)) = h(\gamma(1)) = h(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $h(x) = c \quad \forall x \in D$ Le primitive di un campo conservativo definito su un insieme connesso differiscono tra loro per una costante.

Def	CAMPO VETTORIALE IRROTAZIONALE

Un campo vettoriale $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 si dice IRROTAZIONALE se

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x) \qquad \forall x \in D \quad \forall j \neq k = 1 \dots n$$

Se $w = \sum_{j=1}^{n} F_j\, dx_j$ con $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ irrotazionale $\Rightarrow w$ si dice una forma chiusa.

Prop	F campo C^1 conservativo $\Rightarrow F$ è irrotazionale

$\not\Leftarrow$

DIM:

$F\ C^1$ conservativo $\Rightarrow \exists\ f\ C^2$ primitiva di F $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = F_j$

SCHWARZ

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_k}$$

Esempi:

(a) $\quad F(x,y) = (3x^2, -xy) \qquad \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2) = 0$

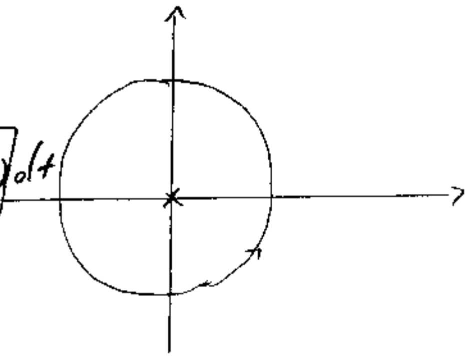
$\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(-xy) = -y \quad$ F non è irrotazionale e non è conservativo

(b) $\quad F(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ è IRROTAZIONALE

ma ciò non vuol dire che è conservativo e infatti non lo è.

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$



$$\int_\gamma \langle F, ds\rangle = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cdot(\cos t)\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi \neq 0 \Rightarrow F \text{ non è conservativo}$$

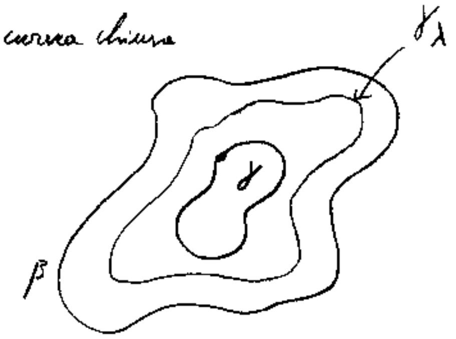
DEF. CURVE OMOTOPE

$D \subset \mathbb{R}^n$ aperto, due curve chiuse $\beta, \gamma : [a,b] \mapsto D$ si dicono omotope in D se:

$\exists\ h : [a,b] \times [0,1] \mapsto D$ continua t.c.

(i) $h(t,0) = \beta(t) \qquad h(t,1) = \gamma(t) \quad \forall\, t \in [a,b]$

(ii) posto $\gamma_\lambda(t) = h(t,\lambda) \Rightarrow \gamma_\lambda : [a,b] \to D$ è una curva chiusa



Posso deformare una curva dentro l'altra in maniera continua.

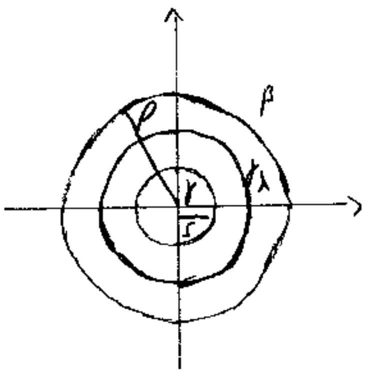
Esempio:

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\beta(t) = (\rho\cos t, \rho\sin t)$

$\gamma(t) = (s\cos t, s\sin t)$

$t \in [0, 2\pi]$, $\rho > s > 0$



$h(t,\lambda) = \big((\rho + \lambda(s-\rho))\cos t,\ (\rho + \lambda(s-\rho))\sin t\big) \qquad (t,\lambda) \in [0,2\pi] \times [0,1]$

$h(t,0) = (\rho\cos t, \rho\sin t) = \beta(t)$

$h(t,1) = (s\cos t, s\sin t) = \alpha(t)$

γ_λ è una curva di raggio $\rho + \lambda(s-\rho)$

DEF | SEMPLICEMENTE CONNESSO

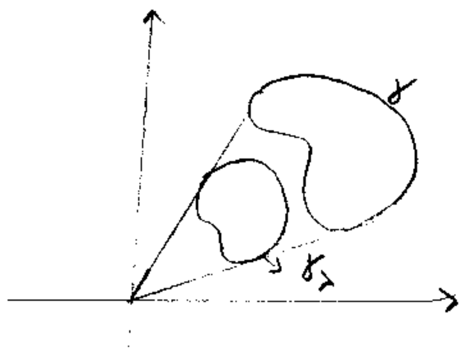
$D \subset \mathbb{R}^n$ aperto si dice semplicemente connesso se è connesso e se ogni curva chiusa C^1 a tratti contenuta in D è omotopa in D a una curva costante (cioè a un punto)

Esempi:

(a) $D = \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva chiusa C^1 a tratti $\boxed{h(t,\lambda) := \lambda\gamma(t)}$ $(t,\lambda) \in [a,b]\times[0,1]$ continua

$h(t,1) = \gamma(t)$ $\quad \gamma_\lambda(t)$ è una curva chiusa

$h(t,0) = 0$



(b) $D = \{(x,y) \mid y>0\}$ è semplicemente connesso

$$h(t,\lambda) = (0,1) + \lambda(\gamma(t) - (0,1)) = (\lambda x(t), \overset{?}{1} + \lambda(y(t) - 1))$$

(c) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso

(d) $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso

(e) $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ non è sempl. connesso.

3|

$\boxed{\text{Teo}}$

$D \subset \mathbb{R}^n$ semplicemente connesso
$\Rightarrow$ F è conservativo.
$F: D \to \mathbb{R}^n$ irrotazionale

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso perché

$F(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2} , \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$ è irrotazionale ma non conservativo.

Esempi:

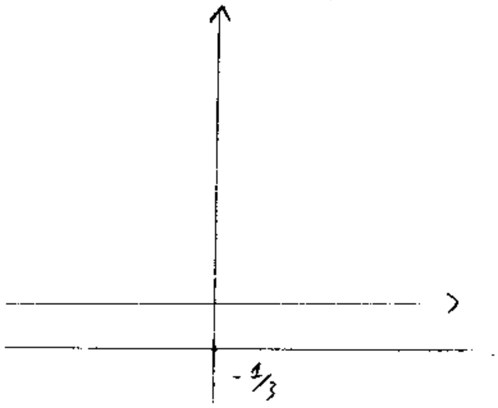
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \langle F, ds \rangle$ dove $F(x,y) = \left(\dfrac{x^2 \cos(x^3-2)}{3y+1} , - \dfrac{\sin(x^3-2)}{(3y+1)^2} \right)$

$\gamma(t) = (2^{t/3}, t) \quad t \in [0,1]$

Se $F = \nabla f \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma \langle F, ds \rangle = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$

$D = \left\{ (x,y) \mid y \neq -\frac{1}{3} \right\}$

$|\gamma| \subset \left\{ (x,y) \mid y > -\frac{1}{3} \right\}$
semplicemente connesso.



$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 \cos(x^3-2)}{3y+1} \right) = - \frac{3x^2 \cos(x^3-2)}{(3y+1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\sin(x^3-2)}{(3y+1)^2} \right) = - \frac{3x^2 \cos(x^3-2)}{(3y+1)^2}$$

Campo è irrotazionale e quindi è conservativo in D_1

f potenziale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^2 \cos(x^3-2)}{3y+1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\sin(x^3-2)}{(3y+1)^2} \Rightarrow f(x,y) = -\displaystyle\int \dfrac{\sin(x^3-2)}{(3y+1)^2}\,dy = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\sin(x^3-2)}{3y+1} + g(x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2\cos(x^3-2)}{3y+1} + g'(x) = \frac{x^2\cos(x^3-2)}{3y+1} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

Primitiva di F in D_1

$$f(x,y) = \frac{1}{3}\,\frac{\sin(x^3-2)}{3y+1} + c \qquad \int_\gamma \langle F, ds\rangle = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) =$$

$$\gamma(t) = (2^{t/3}, t) \Rightarrow \; = f(\sqrt[3]{2}, 1) - f(1, 0) = \sin 2$$

(b) $F(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right)$ $\qquad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \quad F \text{ è irrotazionale}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow f(x,y) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{2x}{x^2+y^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + g(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y + g'(y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow g'(y) = 0 \quad g(y) = 0 \end{cases}$$

Primitiva $f(x,y) = \log(x^2+y^2) + c$

$\boxed{\text{TEO:}}$

$D \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $F: D \to \mathbb{R}^n$ irrotazionale, $\beta, \gamma: [0,b] \to D$ curve chiuse C^1 a tratti omotope in $D \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma \langle F, ds\rangle = \int_\beta \langle F, ds\rangle$ Se γ è omotopa a una curva costante $\Rightarrow \displaystyle\int_\gamma \langle F, ds\rangle = 0$

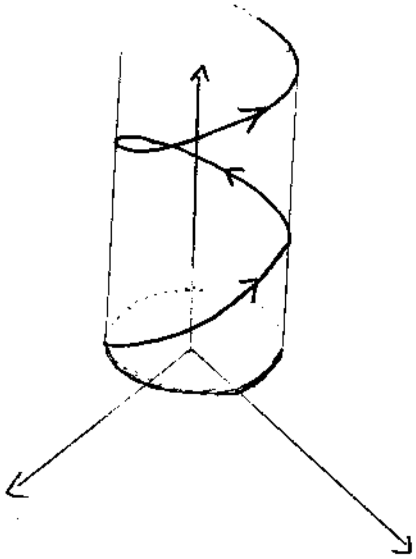
ESERCIZI

1) $\gamma(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ $\quad a, b > 0 \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$

- REGOLARITÀ: $\gamma'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b) \neq (0,0,0) \Rightarrow \gamma$ è regolare

- SEMPLICITÀ: $\exists\, t_1 \neq t_2$ t.c. $\begin{cases} a\cos t_1 = a\cos t_2 \\ a\sin t_1 = a\sin t_2 \\ b t_1 = b t_2 \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_2 \Rightarrow \gamma$ è semplice

- DISEGNO DEL SOSTEGNO:



- LUNGHEZZA:

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt =$$

$$= 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

---

2) $\rho = a(1+\cos\theta)$ $\quad \theta \in [0, 2\pi] \quad a > 0 \quad$ ρ è una curva polare

- REGOLARITÀ: $\gamma: \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$ $\quad \gamma': \begin{cases} x' = \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta \\ y' = \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta \end{cases}$

$$\|\gamma'(\theta)\| = \left[\rho'(\theta)^2\cos^2\theta + \rho(\theta)^2\sin^2\theta - \cancel{2\rho(\theta)\rho'(\theta)\sin\theta\cos\theta} + \rho'(\theta)^2\sin^2\theta + \rho(\theta)^2\cos^2\theta + \cancel{2\rho(\theta)\rho'(\theta)\sin\theta\cos\theta}\right]^{1/2}$$

$\Rightarrow \|\gamma'(\theta)\| = a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta} = 0 \iff \theta = \pi \Rightarrow \gamma$ non è regolare

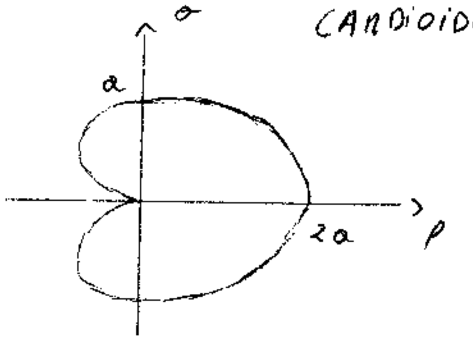
- SEMPLICITÀ: (la curva non è semplice se il sostegno della curva si interseca con se stesso).

ESERCIZI

γ polare non è semplice $\iff \exists\, \theta_1$ t.c. $\rho(\theta_1) = \rho(\theta_1 + 2k\pi)$

Visto che $\theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \gamma$ è semplice perché non si interseca.

- SOSTEGNO



3) $\gamma(t) = \rho(t - \sin t, 1 - \cos t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

- REGOLARITÀ: $\gamma'(t) = \rho(1 - \cos t, \sin t)$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \rho^2(1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t) = 2\rho^2(1 - \cos t) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$t = 0, 2\pi \Rightarrow \gamma \text{ non è regolare}$$

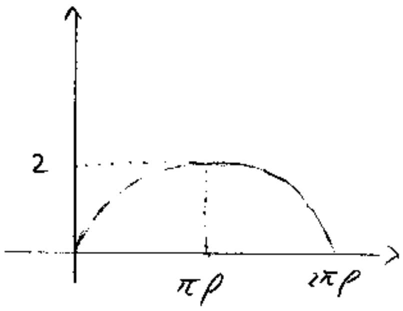
- SEMPLICITÀ: $x'(t) = 1 - \cos t \geq 0 \quad x(t) = t - \sin t$ è crescente $\Rightarrow \gamma$ è semplice

- LUNGHEZZA:

- SOSTEGNO

$$L = \sqrt{2}\,\rho \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = 2\sqrt{2}\,\rho \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos t}}\, dt \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mu = \cos t \Rightarrow L = 8\rho$



ESERCIZI

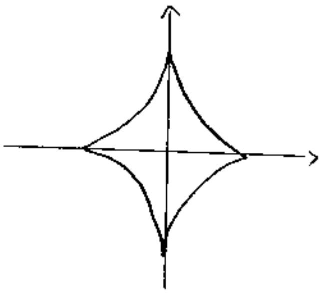
4) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

- REGOLARITÀ: $\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t,\ 3\sin^2 t \cos t)$,

$\|\gamma'(t)\|^2 = 9\sin^2 t\cos^2 t = 0 \iff t = 0, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \gamma$ non è regolare

- SEMPLICITÀ: $\exists ?\ t_1 \neq t_2$ t.c. $\begin{cases} \cos^3 t_1 = \cos^3 t_2 \\ \sin^3 t_1 = \sin^3 t_2 \end{cases} \iff t_1 = t_2 \Rightarrow \gamma$ è semplice

- SOSTEGNO:

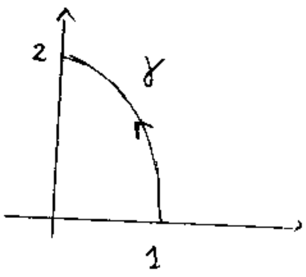


ASTEROIDE

5) $F(x,y) = \left(\frac{e^x}{1+y^2} + y,\ \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} \right)$

Calcolare l'integrale

$\gamma(t) = (\cos t,\ 2\sin t) \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2})$



$D \subset \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso

Se F è irrotazionale e D sempl. connesso $\Rightarrow F$ è conservativo

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^x}{1+y^2} + y \right) = -\frac{2ye^x}{(1+y^2)^2} + 1$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} \right) = \frac{-2ye^x}{(1+y^2)^2}$

$\neq$ non è irrotazionale $\Rightarrow$ non è conservativo

$F(x,y) = F_1(x,y) + F_2(x,y)$ ESERCIZI

$F_1 = \left(\frac{e^x}{1+y^2} , \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} \right) \Rightarrow$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ conservativo

$F_2 = (y, 0)$ non è irrotazionale

$$f_1(x,y) = \int \frac{e^x}{1+y^2}\, dx = \frac{e^x}{1+y^2} + g(y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-2ye^x}{(1+y^2)^2} + g'(y) = \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} \Rightarrow g'(y) = \frac{2y}{(1+y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{1}{1+y^2} + c \quad \Rightarrow f_1 = \frac{e^x+1}{1+y^2}$$

$$\int_\gamma \langle F_2\, ds \rangle = \int_0^{\pi/2} 2\sin t(-\sin t)\, dt = -2\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = -2\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin^2 t}{4} \Big|_0^{\pi/2} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_\gamma \langle F_1, ds \rangle = f_1(0,2) - f_1(1,0) = \frac{2}{5} - e - 1$$

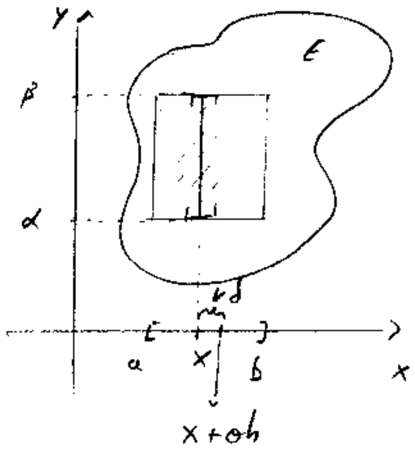
$$\int_\gamma \langle F, ds \rangle = \frac{2}{5} - e - 1 - \frac{\pi}{2}$$

1/ 2/12/19

TEO: (derivazione sotto il segno di integrale)

$E \subset \mathbb{R}^2$ aperto; $f: E \to \mathbb{R}$ continua e t.c. $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(E)$ allora la funzione:

$$F(x, \alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy$$



definita su $D = \{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \{x\} \times [\alpha, \beta] \subset E\}$

è di Classe C^1 in D e

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, \alpha, \beta) = -f(x, \alpha) \qquad \frac{\partial F}{\partial \beta} = f(x, \beta)$$

DIM:

Sia $a < x < b$ t.c. $[a,b] \times [\alpha, \beta] \subset E$ $\quad h \in \mathbb{R}$ t.c. $x+h \in (a,b)$

$$\frac{1}{h}\left[F(x+h, \alpha, \beta) - F(x, \alpha, \beta)\right] = \frac{1}{h}\left[\int_\alpha^\beta f(x+h, y)\,dy - \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy\right] =$$

$$\frac{1}{h}\int_\alpha^\beta \left[f(x+h, y) - f(x,y)\right] dy \overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{1}{\cancel{h}}\int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y)\,\cancel{h}\,dy =$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \left| \frac{1}{h}\left[F(x+h, \alpha, \beta) - F(x, \alpha, \beta)\right] - \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy \right| =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left| \int_\alpha^\beta \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] dy \right|$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ è continua in $[a,b] \times [\alpha, \beta]$ compatto $\Rightarrow$ è uniformemente continua $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ t.c. $\| (x,y) - (x',y') \| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x',y') \right| < \varepsilon \qquad$ sia $|h| < \delta$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x+h\theta, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \left| \int_\alpha^\beta \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+h\theta, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] dy \right| \overset{\alpha<\beta}{\leq}$$

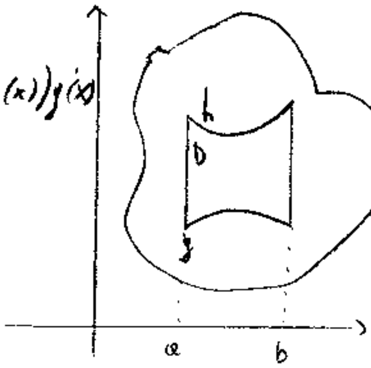
$$\leq \int_\alpha^\beta \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x+h\theta, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| dy < \varepsilon (\beta - \alpha)$$

Corollario: $f: E \to \mathbb{R}$ come nel teorema e $g, h: [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c.

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x) \}$ è contenuto in E

Allora:

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy + f(x, h(x))\,h'(x) - f(x, g(x))\,g'(x)$$



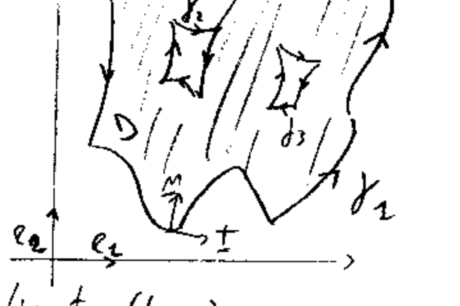
DEF:

$D \subset \mathbb{R}^2$ t.c. ∂D sia l'unione di un numero finito di curve chiuse, semplici e regolari a tratti. L'orientazione positiva di ∂D è t.c.

detto $\underline{t}$ il versore tangente positivo a ∂D e detto $\underline{n}$ il versore normale interno a ∂D

$(\underline{t} = (t_x, t_y) \quad \underline{n}\ (n_x, n_y))$

si ha $\det \begin{pmatrix} t_x & n_x \\ t_y & n_y \end{pmatrix} = 1 \qquad$ cioè $\Leftrightarrow$ la coppia ordinata $(\underline{t}, \underline{n})$ si può far coincidere con $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ con una rotazione



DEF. (dominio regolare normale)

$D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio regolare normale se è un insieme normale

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \, , \, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ con $g, h \in C^1([a,b])$

DEF. dominio regolare o di Green

$D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio regolare (o di Green) se:

(i) $D = D_1 \cup D_2 \cup .. D_m$ con D_j dominio regolare normale e $\mathring{D}_j \cap \mathring{D}_k \neq \emptyset$ $j \neq k$

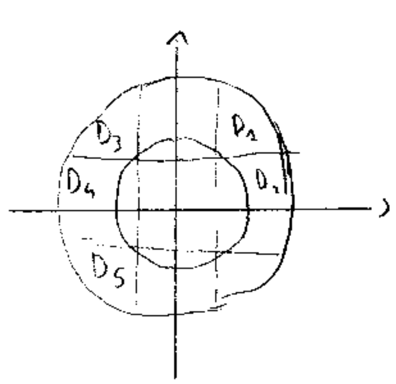
(ii) ∂D è l'unione di un numero finito di curve chiuse, semplici e regolari a tratti.

(iii) indicato con $+\partial D$ una parametrizzazione positiva di ∂D,
allora $\forall \underline{F}$ campo vettoriale continuo in un aperto $E \supset D$

$$\int_{+\partial D} \langle \underline{F}, ds \rangle = \sum_{j=1}^{m} \int_{+\partial D_j} \langle \underline{F}, ds \rangle$$

Esempio.

$D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$



(i) $D = D_1 \cup D_2 \quad D_X$ con D_j regolari normali
privi di pti interni in comune

(ii) $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 \qquad \gamma_j(t) = (j \cos t, \, j \sin t) \quad j = 1, 2$
curve regolari, semplici e chiuse $\quad t \in [0, 2\pi]$

DEF.

$E \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\quad \underline{F} : E \to \mathbb{R}^2$ campo vettoriale C^1

$\underline{F} = (P, Q) \quad (P, Q : E \to \mathbb{R}, C^1)$ il rotore di $\underline{F}$ è, $\operatorname{rot} F = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

TEOREMA GAUSS - GREEN

$E \subset \mathbb{R}^2$, $F : E \to \mathbb{R}^2$ campo vettoriale C^1, $D \subset E$ dominio regolare, Allora

$$\int_{+\partial D} \langle F, ds \rangle = \iint_D (\operatorname{rot} F) \, dx \, dy$$

EQUIVALENTE $\quad \displaystyle\int_{+\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy$

DIM: D dominio regolare $\quad D = \underbrace{D_1 \cup D_2 \dots \cup D_m}_{\text{regolari normali}}$

$$\int_{+\partial D} \langle F, ds \rangle = \sum_{j=1}^{m} \int_{+\partial D_j} \langle F, ds \rangle$$

se dimostriamo il teorema nel caso in cui D sia regolare normale $\Rightarrow$

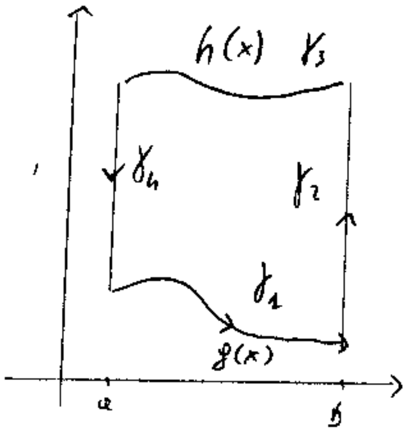
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \int_{+\partial D_j} \langle F, ds \rangle = \sum_{j=1}^{m} \iint_{D_j} \operatorname{rot} F = \iint_D \operatorname{rot} F$$

Sia D regolare normale rispetto a x

$D = \{ (x, y) \mid a \le x \le b, \ g(x) \le y \le h(x) \}$ $\quad$ g e h funzioni di classe C^1

3|

$$\int_{+\partial D} P\,dx + Q\,dy$$



$\gamma_1(x) = (x, g(x)) \quad x \in [a,b]$ positivo

$\gamma_2(y) = (b, y) \quad y \in [g(b), h(b)]$ pos

$\gamma_3(x) = (x, h(x)) \quad x \in [a,b]$ neg

$\gamma_4(y) = (a, y) \quad y \in [g(a), h(a)]$ neg

$$\int_{+\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_3} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_4} P\,dx - Q\,dy =$$

$$= \int_a^b \left[P(x, g(x)) + Q(x, g(x))\, g'(x) \right] dx + \int_{g(b)}^{h(b)} Q(b,y)\,dy +$$

$$- \int_a^b \left[P(x, h(x)) + Q(x, h(x))\, h'(x) \right] dx - \int_{g(a)}^{h(a)} Q(a,y)\,dy \Rightarrow$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] dy \Rightarrow \int_a^b dx \left[\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dy \right] =$$

corollario

$$\stackrel{\downarrow}{=} \int_a^b dx \left[\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} Q(x,y)\,dy - Q(x, h(x))\, h'(x) + Q(x, g(x))\, g'(x) \right] =$$

$$= \int_{g(b)}^{h(b)} Q(b,y)\,dy - \int_{g(a)}^{h(a)} Q(a,y)\,dy - \int_a^b dx\, Q(x, h(x)) + \int_a^b dx\, Q(x, g(x))\, g'(x) -$$

$$+ \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy = \int_a^b dx \left[P(x, g(x)) - P(x, h(x)) \right]$$

Corollario $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio regolare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda + \mu = 1$

$$\Downarrow$$

$$|D| = \int_{+\partial D} \lambda\, y\, dx - \mu\, x\, dy$$

Dim.

$$\int_{+\partial D} \overset{P}{(-\lambda y)}\, dx + \overset{Q}{(\mu x)}\, dy \overset{G.G.}{=} \iint_D \left[\frac{\partial \mu x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(-\lambda y) \right] dx\, dy =$$

$$= (\lambda + \mu) \iint_D 1\, dx\, dy = |D|$$

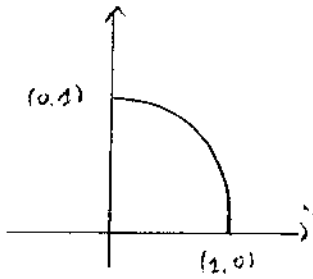
Esercizi.

Esercizi per casa 27/11/19

1) Dire se i campi seguenti sono irrotazionali e/o conservativi e calcolare (se $\exists$) la primitiva e gli integrali lungo le curve date

(a) $F(x,y) = (x+y,\ x-y)$ $\quad\gamma$ = arco di circonferenza da $(1,0)$ a $(0,1)$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$



Vediamo se è irrotazionale:

$\frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1 \qquad \frac{\partial}{\partial x}(x-y) = 1$ è irrotazionale

$D = \mathbb{R}^2 \to$ semplicemente connesso $\Rightarrow$ è conservativo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x+y \Rightarrow f(x,y) = \int x+y\,dx = \frac{x^2}{2} + xy + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x-y \Rightarrow y + g'(y) = x-y \Rightarrow g'(y) = x-2y \Rightarrow g(y) = xy - \frac{2y^2}{2} = xy - y^2 \end{cases}$$

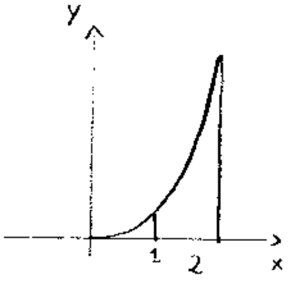
non può essere, poiché dipende anche da x $\to$ non è conservativo

Primitiva è $\cancel{f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + xy - y^2 = \frac{x^2}{2} + 2xy - y^2}$

$$\int_\gamma \langle F, ds\rangle = \int_0^{\pi/2} \langle(\cos t + \sin t,\ \cos t - \sin t), (-\sin t, \cos t)\rangle\, dt \quad *$$

(b) $F(x,y) = \left(\frac{1}{x+y},\ x^2+y^2\right)$ $\quad\gamma$ = arco della parabola $y = x^2$ tra $x=1$ e $x=2$

$\gamma(t) = (t^2, t) \qquad t \in [1,2]$



Irrotazionalità: $\quad \frac{\partial}{\partial y}(1/x+y) = -\frac{1}{(x+y)^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = 2x$

non è irrotazionale $\qquad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{y \neq -x\}$ non è connesso semplicemente

Dato che abbiamo dimostrato che F non è conservativo non ha senso calcolare la primitiva dato che per definizione un campo vettoriale è conservativo se $\exists\, f$ t.c. $F = \nabla f$. Per verificare quanto appena detto proviamo a utilizzare la definizione, non dovrebbe esserci soluzione.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y} \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2y + \dfrac{y^3}{3} + g(x)\right) = x + y^2 + g'(x) = \dfrac{1}{x+y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2 \Rightarrow f(x,y) = \int x^2 + y^2\, dy = x^2y + \dfrac{y^3}{3} + g(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ non esiste soluzione o se esistesse $g'(x)$ dipenderebbe da y.

$$\int_1^2 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \int_1^2 \left\langle \left(\frac{1}{t^2+t},\ t^4 + t^2\right), (2t, 1)\right\rangle dt \Rightarrow$$

$$* \int_0^{\pi/2} \langle (\cos t + \sin t,\ \cos t - \sin t), (-\sin t, \cos t)\rangle\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t)(\cos t)\, dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} -\sin t\cos t - \sin^2 t + \cos^2 t - \sin t\cos t = \int_0^{\pi/2} -2\sin t\cos t\, dt + \int_0^{\pi/2} \cos^2 t - \sin^2 t\, dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} -\frac{\sin(2t)}{2}\, dt + 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = +\frac{1}{2}\cos(2t)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin(2t)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}(-1 - 1 + 00) = -1$$

In conclusione la primitiva non esiste e l'integrale è $= -1$.

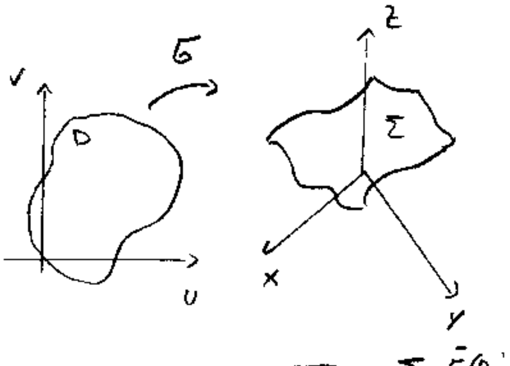
$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{2t}{t^2+t} + t^4 + t^2\, dt = \frac{t^5}{5}\Big|_1^2 + \frac{t^3}{3}\Big|_1^2 + 2\log(t+1)\Big|_1^2 = \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + 2\log 3 +$$

$$- 2\log(2)$$

1| 4/12/19

DEF. Superficie elementare in $\mathbb{R}^3$

$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie elementare (o parametrica), se $\exists\, D \subset \mathbb{R}^2$ aperto che sia l'interno di una curva semplice e chiusa e una funzione $\sigma : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ continua e iniettiva in D t.c. $\Sigma = \sigma(\bar{D})$



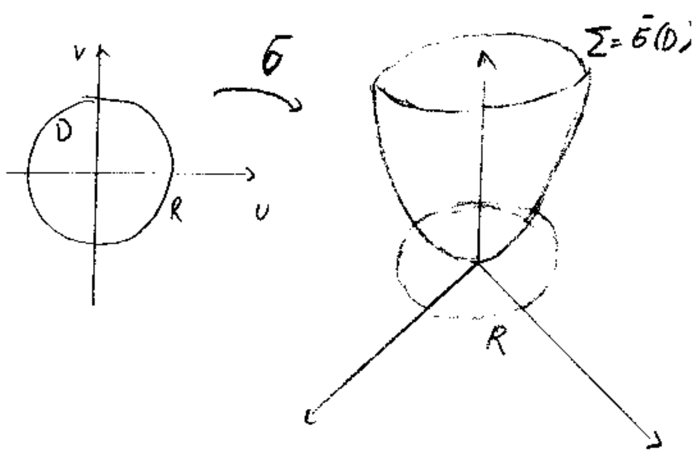
Esempi:

(a) $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 < R^2\}$

$\sigma : \bar{D} = \{(u,v) \mid u^2+v^2 < R^2\} \to \mathbb{R}^3$

$\sigma(u,v) = (u, v, u^2+v^2) \iff$

$$\iff \sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2+v^2 \end{cases} \iff \begin{matrix} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \le R^2 \end{matrix}$$



Una superficie della forma $\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))$ con $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ continua si dice una superficie cartesiana

$\Updownarrow$

Σ è il grafico di f

(b) $S_R = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

In coordinate sferiche $S_R : \rho = R,\ \varphi = u,\ \theta = v$

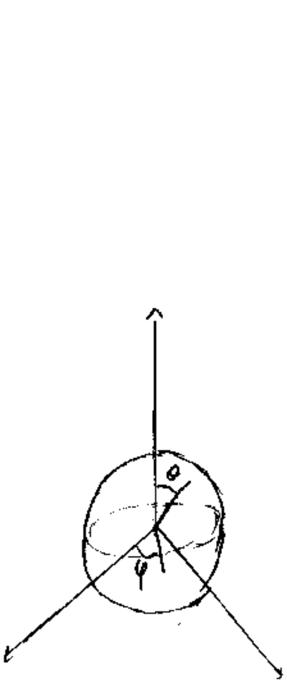
$\Updownarrow$

$x = R \cos u \sin v$

$y = R \sin u \sin v$

$z = R \cos v$

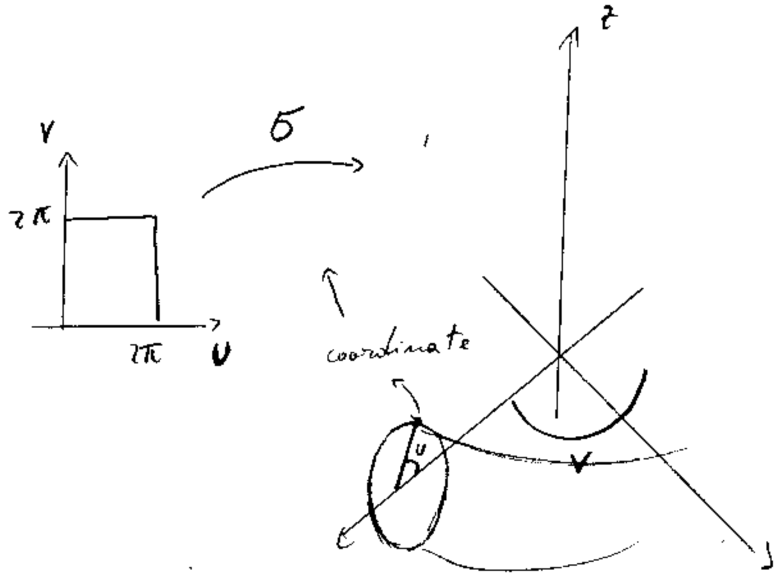
$(u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$



$\sigma(u,v) = (R\cos u \sin v,\ R \sin u \sin v,\ R\cos v)$ $\qquad (u,v) \in \bar{D} = [0,2\pi]\times[0,\pi]$

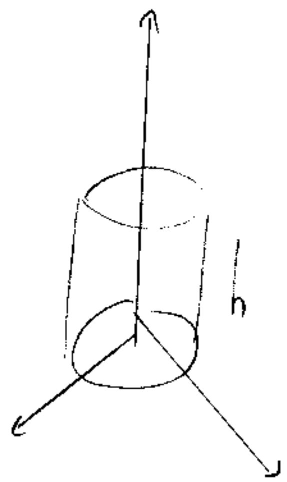
(c) toro $\quad \begin{cases} x' = R + \rho\cos u \\ z' = \rho \sin u \end{cases}$

$$\begin{cases} x = (R+\rho\cos u)\cos v \\ y = (R+\rho\cos u)\sin v \\ z = \rho \sin u \end{cases}$$



(d)

$$\sigma: \begin{cases} x = R\cos u \\ y = R\sin u \\ z = v \end{cases} \qquad (u,v) \in [0,2\pi]\times[0,h]$$

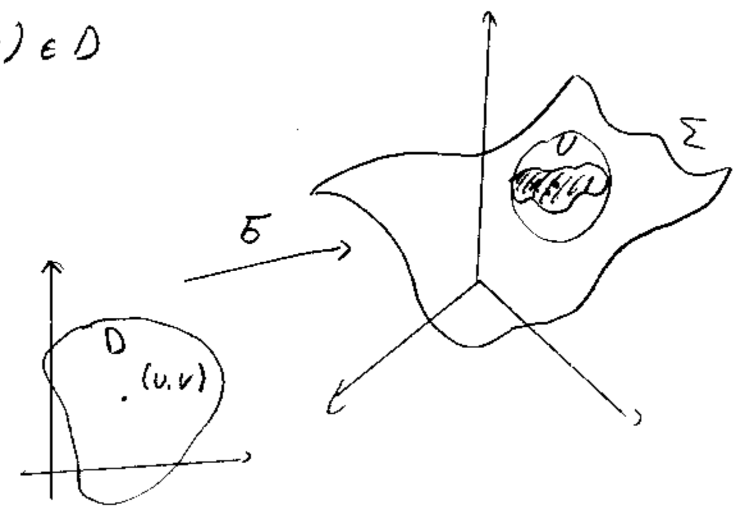


DEF. Interno e bordo di una superficie

Σ superficie elementare, $x_0 \in \Sigma$ si dice interno a Σ se $\exists\ U \subset \mathbb{R}^3$ intorno di x_0 e ha parametrizzazione $\sigma: \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ di $\Sigma \cap U$ t.c. $x_0 = \sigma(u_0, v_0)$ con $(u_0,v_0) \in D$

$\Sigma' = \{x \in \Sigma \mid x \text{ è interno}\}$

$\partial\Sigma = \Sigma \setminus \Sigma'$ bordo di Σ



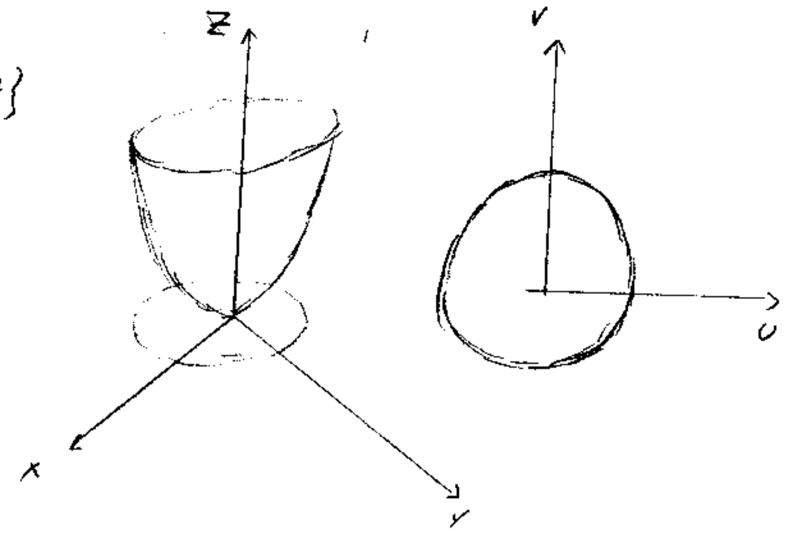
2

Esempi:

(a) $D = \{(u,v) \mid u^2+v^2 \leq R^2\}$ $\quad \sigma(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$ $\quad (u,v) \in \bar{D}$

$\Sigma' = \sigma(D) = \{(u,v,u^2+v^2) \mid u^2+v^2 < R^2\}$

$\partial\Sigma = \{(x,y,R^2) \mid x^2+y^2 = R^2\}$

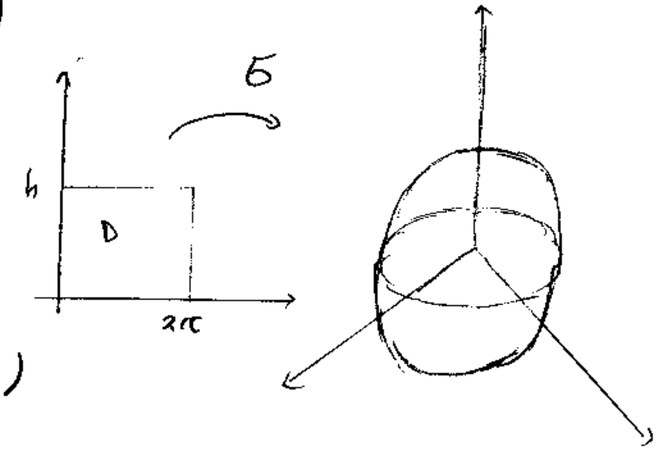


(b) S_R = sfera

$\sigma(u,v) = (R\cos u \sin v,\ R \sin u \sin v,\ R\cos v)$

$(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$

$\Sigma' \supset (S_R \setminus \{(x,y,z) \mid y=0,\ x \geq 0\})$



Se ora prendo: $\sigma'(u,v) = (R\cos u \sin v,\ R\sin u \sin v,\ R\cos v)$

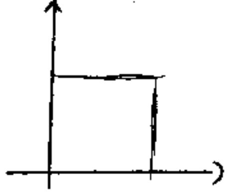
$(u,v) \in [-\pi,\pi] \times [0,\pi]$

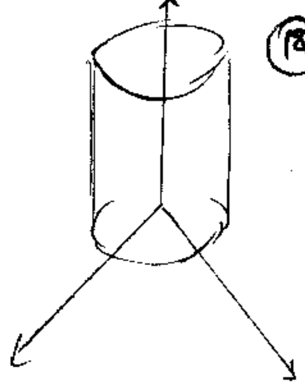
$S_R = \sigma'([-\pi,\pi]\times[0,\pi])$ $\qquad \sigma'(0,v) = (R\sin v,\ 0,\ R\cos v)$

$\sigma'(\{0\}\times[0,\pi]) = \{(x,y,z) \in S_R \mid y=0,\ x \geq 0\} \subset S_R'$

$S'_R = S_R \qquad \partial S_R = \emptyset$

(C) Cilindro





$\sigma(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$

$(u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, h]$

$\Sigma' \supset (\Sigma \setminus \{(x,y,z) \mid z=0,\ z=h,\ y=0\ \ x \geq 0\})$

DEF.

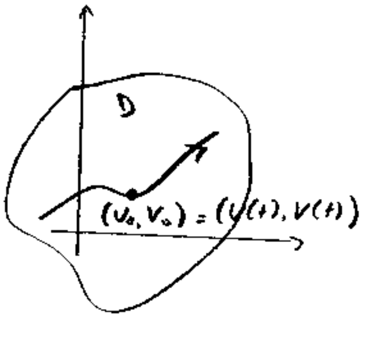
$\sigma : \bar{D} \to \Sigma$ superficie elementare con $\sigma \in C^1(D)$

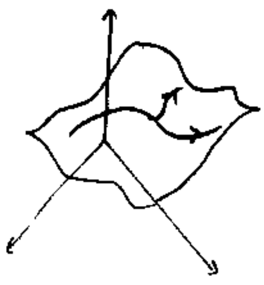
Sia $t \in I \to (u(t), v(t)) \in D$ una curva regolare in D

Definiamo $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ $t \in I$ $\qquad \gamma : I \subset R \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$

$$\gamma'(t_0) = \frac{d}{dt}\, \sigma(u(t), v(t)) \Big|_{t=t_0} = \sigma_u(u(t), v(t))\, u'(t) + \sigma_v(u(t), v(t))\, v'(t) \Big|_{t=t_0} =$$

$$= \sigma_u(u_0, v_0)\, u'(t_0) + \sigma_v(u_0, v_0)\, v'(t_0).$$





Se $\sigma_u(u_0, v_0)$ e $\sigma_v(u_0, v_0)$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \gamma'(t_0) \neq 0$

Poiché $(u'(t_0), v'(t_0)) \neq (0,0)$

retta tangente a γ in $x_0 = \sigma(u_0, v_0) = \gamma(t_0)$

$$\{x_0 + s\gamma'(t_0) \mid s \in R\} = \{x_0 + s\, u'(t_0)\, \underline{\sigma_u}(u_0, v_0) + s\, v'(t_0)\, \sigma_v \ldots \mid s \in R\}$$

è contenuto nel piano $\Pi = \{x_0 + \lambda\, \sigma_u(u_0, v_0) + \mu\, \sigma_v(u_0, v_0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Piano tangente a Σ in $x_0 = \sigma(u_0, v_0)$ è il piano $\perp$ a $\underline{\sigma_u}(u_0, v_0) \times \underline{\sigma_v}(u_0, v_0)$

passante per x_0 $\quad \Pi : \langle \underline{\sigma_u}(u_0, v_0) \times \underline{\sigma_v}(u_0, v_0),\ x - x_0 \rangle = 0$

$$\Pi : \ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

DEF superficie regolare

Σ superficie parametrica, $x_0 \in \Sigma$ si dice regolare se $\exists\ U \subset \mathbb{R}^3$ intorno di x_0 e $\sigma : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di $\Sigma \cap U$ di classe C^1 t.c.

$x_0 = \sigma(u_0, v_0)$ e $\sigma_u(u_0, v_0) + \sigma_v(u_0, v_0)$ sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow \sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0) \neq 0$

$$\pm \frac{\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)}{\|\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)\|}$$ sono vettori normali a Σ in x_0

Σ si dice <u>regolare</u> se ogni $x \in \Sigma$ è un punto regolare, e si dice <u>regolare a tratti</u> se è regolare tranne al più nell'unione di sostegni di un numero finito di curve.

. Superficie Cartesiana

$\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad (u,v) \in \bar{D}$

$\sigma_u(u,v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right)$

$\sigma_v(u,v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)$

$$\sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} =$$

$= \left(-\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), -\frac{\partial f}{\partial v}(u,v), 1\right) \neq (0,0,0) \Rightarrow$ una superficie cartesiana con $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 è regolare.

$$n^+(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\|} = \frac{(-f_u(u,v), -f_v(u,v), 1)}{\sqrt{1 + f_u(u,v)^2 + f_v(u,v)^2}}$$

$\downarrow$

versore normale uscente dalla superficie

$$n^+ : \Sigma \to \mathbb{R}^3 \qquad n^+(x,y,z) = \frac{(-f_u(x,y), -f_v(x,y), 1)}{\sqrt{1+f_u(x,y)^2+f_v(x,y)^2}} \qquad (x,y,z) \in \Sigma$$

è una funzione continua

(Le superficie cartesiane hanno 2 facce individuate da n^+ e n^-)

1| 5/12/19

Def: (superficie elementare orientabile)

Σ superficie elementare regolare si dice orientabile se $\exists\, n^+ , \Sigma' \to \mathbb{R}^3$ continua

tale che $\forall x \in \Sigma'$ $n^+(x)$ è un versore normale a Σ in x

Esempi

(a) $\Sigma = S_R$

$\sigma(u,v) = (R\cos u \sin v,\ R \sin u \sin v,\ R\cos v)$ $\qquad \sigma_u \times \sigma_v = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -R\sin u \sin v & R\cos u \sin v & 0 \\ R\cos u\cos v & R\sin u\cos v & -R\sin v \end{pmatrix}$

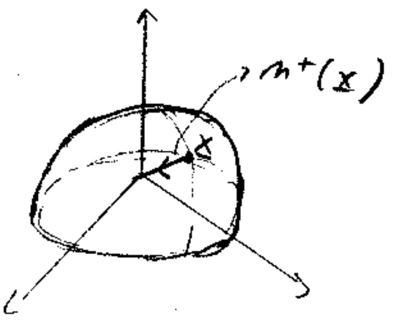
$= \left(-R^2 \cos u \sin^2 v,\ -R^2 \sin u \sin^2 v,\ -R^2 \sin v \cos v\right)$

$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = R^2 \sin v$

$$\frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = (-\cos u \sin v,\ -\sin u \sin v,\ -\cos v) = -\frac{\sigma(u,v)}{R} = -\frac{\sigma(u,v)}{\|\sigma(u,v)\|}$$

$\underline{x} = (x,y,z) \in S_R$

$\sigma(u,v)$



$n^+(\underline{x}) = \dfrac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$ è una funzione continua

di $\underline{x} \in S_R \Rightarrow S_R$ è orientabile

(b) Nastro di Mobius

non è orientabile

DEF: SUPERFICI INVERTIBILI

Una superficie elementare Σ si dice invertibile se $\exists\ \sigma : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di Σ che è iniettiva su $\bar{D}$

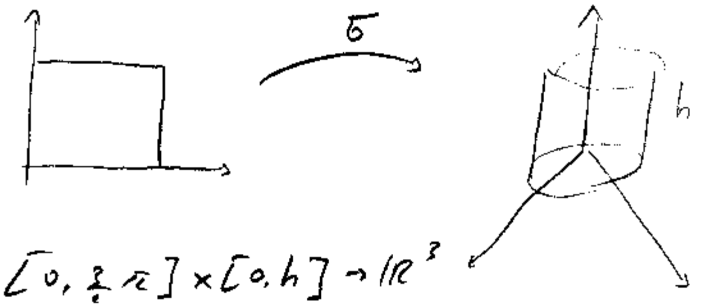
Esempi

(a) $\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))$ $\quad (u,v) \in \bar{D}$ è invertibile

$$\sigma(u_1, v_1) = \sigma(u_2, v_2) \iff \begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \\ f(u_1,v_1) = f(u_2,v_2) \end{cases}$$

Σ cartesiana $\Rightarrow$ Σ è invertibile

(b) Cilindro $\quad \sigma(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v) \quad (u,v) \in [0,2\pi]\times[0,h]$



$\sigma(0,v) = \sigma(2\pi, v)$

$\forall v \in [0,h] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ non è invertibile $\qquad \sigma : [0, \frac{3}{2}\pi]\times[0,h] \to \mathbb{R}^3$

è invertibile ma non cartesiana.

Σ è invertibile $\Rightarrow$ $\sigma : \bar{D} \to \Sigma$ è iniettiva e continua e $\bar{D}$ è compatto $\Rightarrow$ $\sigma^{-1} : \Sigma \to \bar{D}$ è continua.

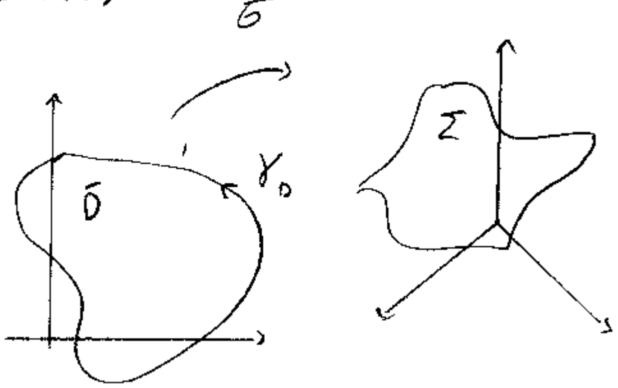
Σ invertibile e regolare

$$n^+(\underline{x}) = \left[\underbrace{\frac{\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v)\|}}_{f \text{ continua di } (u,v)} \right]_{(u,v)=\sigma^{-1}(x)} \leftarrow f \text{ continua di } x$$

$\Rightarrow n^+ : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ è continua

2

Σ^+ è Σ orientata da n^+ $\partial\Sigma = \sigma(\partial D)$



$\gamma = \sigma \cdot \gamma_0$ curva semplice chiusa e regolare a tratti, $|\gamma| = \partial\Sigma$

l'orientazione positiva di γ_0 induce un'orientazione di γ t.c. percorrendo γ nel verso positivo e con la testa nella direzione di n^+ la superficie Σ si mantiene sul lato sinistro (regola della mano destra)

$\boxed{\text{Def: SUPERFICIE COMPOSTA}}$

Σ è una superficie composta se $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \Sigma_m$ con Σ_j semplice invertibile e regolare tali che

(i) $\partial\Sigma_j = \bigcup_{p=1}^{m_j} \Gamma_{jp}$ con Γ_{jp} sostegno di una curva semplice

(ii) $\Sigma_i \cap \Sigma_J = \partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_J$ (cioè Σ_i e Σ_J non hanno punti interni in comune)

(iii) $\forall j = 1 \dots m$ $\exists\, i \neq j$ e $\exists\, p \in \{1, \dots m_i\}$ e $q \in \{1 \dots m_j\}$ t.c. $\Gamma_{ip} = \Gamma_{jq}$ (cioè ogni Σ_i ha in comune almeno un Γ_{ip} con un'altra Σ_j) (si toccano)

(iv) se $\Gamma_{ip} \neq \Gamma_{jq} \Rightarrow \Gamma_{ip} \cap \Gamma_{jq}$ contiene al più gli estremi

(v) ogni Γ_{ip} coincide con al più un Γ_{iq} il bordo $\partial\Sigma$ è l'unione dei Γ_{jp} che non coincidono con nessun altro Γ_{jq}

DEF: (superficie composta orientabile)

Una superficie composta $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \Sigma_n$ si dice orientabile se $\exists$ parametrizzazioni regolari $\sigma_i : \bar{D}_j \to \Sigma_i$ iniettive su $\bar{D}_j$ t.c. l'orientazione $\partial\Sigma_i^+$ e $\partial\Sigma_k^+$ sono opposte su $\partial\Sigma_j \cap \partial\Sigma_k$

In tal caso l'orientazione positiva di $\partial\Sigma$ (indicata con $\partial\Sigma^+$) è quella indotta da $\partial\Sigma_j^+$ $j = 1 \dots n$ e si ottiene con la regola della mano destra.

DEF. AREA DI UNA SUPERFICIE

(i) Σ superficie elementare regolare con parametrizzazione $\sigma : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$, l'area di Σ è $A(\Sigma) := \iint_D \|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\| \, du\, dv$

(D è misurabile poiché $\partial D = |\gamma_D|$ ha misura nulla

(ii) $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \dots \cup \Sigma_n$ superficie composta

$$A(\Sigma) := A(\Sigma_1) \cup A(\Sigma_2) \dots \cup A(\Sigma_n)$$

DEF (parametrizzazioni equivalenti)

Due parametrizzazioni regolari $\sigma : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ e $\tau : \bar{E} \to \mathbb{R}^3$ ($D, E \subset \mathbb{R}^2$ aperti)

Si dicono equivalenti se esiste un diffeomorfismo C^1 $\varphi : \bar{D} \to \bar{E}$ t.c.

$\sigma(u,v) = \tau(\varphi(u,v)) \quad \forall (u,v) \in \bar{D}$

Prop. σ, τ equivalenti $\Rightarrow \iint_D \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du\,dv = \iint_E \|\tau_s \times \tau_t\| \, ds\,dt$

dim $\varphi(u,v) = (s(u,v), t(u,v))$

$\sigma(u,v) = \tau(\varphi(u,v)) \quad \forall (u,v) \in D$

catena

$\sigma_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} \tau(s(u,v), t(u,v)) = \tau_s(s(u,v), t(u,v))\, s_u(u,v) + \tau_t(s(u,v), t(u,v))\, t_u(u,v)$

$\sigma_v = \tau_s(s(u,v), t(u,v))\, s_v(u,v) + \tau_t(s(u,v), t(u,v))\, t_v(u,v)$

$\sigma_u \times \sigma_v = (\underline{\tau}_s s_u + \underline{\tau}_t t_u) \times (\underline{\tau}_s s_v + \tau_t t_v) = (\underline{\tau}_s \times \underline{\tau}_t) s_u t_v + (\underline{\tau}_s \times \underline{\tau}_t) s_v t_u =$

$= \underline{\tau}_s \times \underline{\tau}_t (s_u t_v - t_u s_v) = \underline{\tau}_s \times \underline{\tau}_t \det \begin{pmatrix} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{pmatrix} =$

$= \underline{\tau}_s \times \underline{\tau}_t \det J_\varphi \qquad \Rightarrow \iint_D \|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\| \, du\,dv =$

cambio di variabile

$= \iint_D \|\underline{\tau}_s(\varphi(u,v)) \times \underline{\tau}_t(\varphi(u,v))\| \, |\det J_\varphi(u,v)| \, du\,dv = \iint_E \|\underline{\tau}_s(s,t) \times \underline{\tau}_t(s,t)\| \, ds\,dt$

<u>DEF</u> integrali di superficie di una funzione.

Σ superficie elementare regolare con parametrizzazione $\sigma: \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ C^1

$f: \Sigma \to \mathbb{R}$ continua, l'integrale di superficie di f su Σ è:

$$\iint_\Sigma f\,dS := \iint_D f(\sigma(u,v)) \underbrace{\|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\|\,du\,dv}_{dS},$$

Se $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \dots \cup \Sigma_m$ superficie composta.

DEF. flusso di un campo vettoriale

Σ superficie (composta) orientata dal campo di versori normali $n^+: \Sigma' \to \mathbb{R}^3$, $\underline{F}: \Sigma' \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale continuo. Il <u>flusso</u> di F attraverso Σ è definito da:

$$\Phi_{\Sigma^+}(\underline{F}) = \iint_\Sigma \langle \underline{F}, \underline{n}^+ \rangle\, dS =$$

Se Σ è elementare con parametrizzazione $\sigma: \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ $\quad \underline{n}^+ = \dfrac{\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$

$$= \iint_D \left\langle \underline{F}(\underline{\sigma}(u,v)), \pm \frac{\sigma_u(u,v) \times \underline{\sigma}_v(u,v)}{\cancel{\|\underline{\sigma}_u(u,v) \times \underline{\sigma}_v(u,v)\|}} \right\rangle \cancel{\|\underline{\sigma}_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\|}\, du\,dv =$$

$$= \pm \iint_D \langle \underline{F}(\sigma(u,v)), \underline{\sigma}_u(u,v) \times \underline{\sigma}_v(u,v) \rangle\, du\,dv$$

2|

DEF: (divergenza) $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto

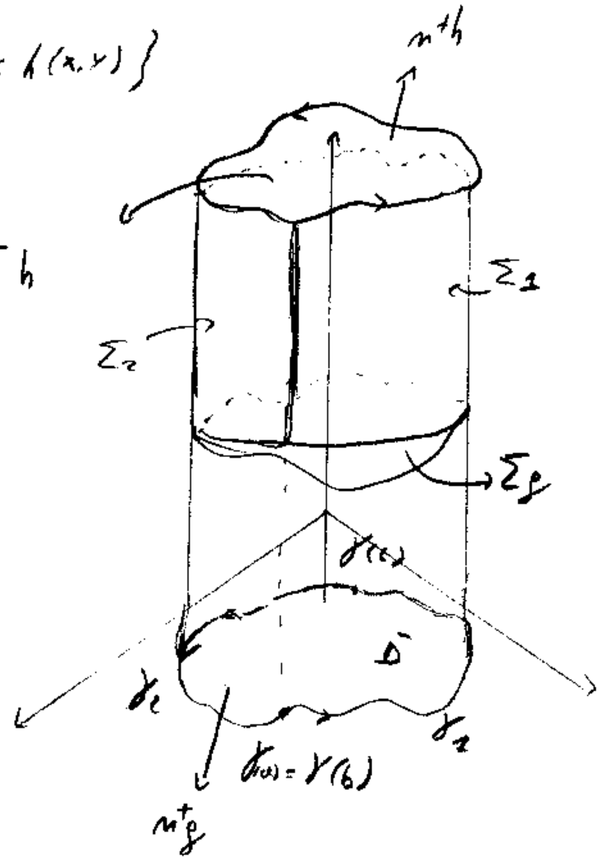
$\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale C^1

$\underline{F} = (P, Q, R)$. La divergenza di $\underline{F}$ è la funzione

$$\operatorname{div} \underline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

DEF. (dominio regolare normale in $\mathbb{R}^3$)

$E \subset \mathbb{R}^3$ è un dominio regolare normale rispetto al piano x, y se è normale $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \bar{D} \text{ e } g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$



dove $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio regolare e

$g, h \in C^1(\bar{D})$

Se E è un dominio regolare normale $\Rightarrow$

$\Rightarrow \partial E$ è una superficie composta orientabile

$\bar{D}$ dominio regolare $\Rightarrow +\partial D$ è il sostegno di una curva chiusa C^1 a tratti.

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$c \in (a,b) \qquad \gamma_1 = \gamma|_{[a,c]} \qquad \gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$

$\Sigma_g \quad \sigma_g(u,v) = (u, v, g(u,v)) \quad (u,v) \in \bar{D}$

$\Sigma_h \quad \sigma_h(u,v) = (u, v, h(u,v)) \quad (u,v) \in \bar{D}$

Σ_g, Σ_h cartesiane $\Rightarrow$ invertibili

$\Sigma_1 : \sigma_1(u,v) = (x(u), y(u), v) \quad u \in [a,c], \; v \in [g(\gamma_1(u)), h(\gamma_1(u))]$

$\Sigma_2 : \sigma_2(u,v) = (x(u), y(u), v) \quad u \in [c,b], \; v \in [g(\gamma_2(u)), h(\gamma_2(u))]$

Σ_1, Σ_2 sono invertibili

$\partial E = \Sigma_g \cup \Sigma_h \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

183

$$n^+_h = \frac{\sigma_{h,u} \times \sigma_{h,v}}{\|\sigma_{h,u} \times \sigma_{h,v}\|} = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1\right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$n^+_g = \frac{\sigma_{g,u} \times \sigma_{g,v}}{\|\sigma_{g,u} \times \sigma_{g,v}\|} = -\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, -1\right)}{\left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right)^{1/2}}$$

DEF. Dominio regolare in $\mathbb{R}^3$

$E \subset \mathbb{R}^3$ si dice un dominio regolare se

(i) $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots \cup E_n$ con E_k dominio regolare normale e $E_j \cap E_k = \emptyset$ se $j \neq k$

(ii) ∂E è una superficie orientabile

(iii) indicati con n^+ e n^+_k i versori normali esterni a ∂E e ∂E_k per ogni campo vettoriale $\underline{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1, con A aperto contenente E vale:

$$\iint_{\partial E} \langle \underline{F}, \underline{n}^+ \rangle \, dS = \sum_{k=1}^{n} \iint_{\partial E_k} \langle \underline{F}, n^+_k \rangle \, dS$$

TEO DELLA DIVERGENZA DI GAUSS

$E \subset \mathbb{R}^3$ dominio regolare, $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $E \subset A$, $\underline{F}: A \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale C^1. Allora:

$$\iint_{\partial E} \langle \underline{F}, \underline{n}^+ \rangle \, dS = \iiint_{E} (\mathrm{div}\, \underline{F}) \, dx\,dy\,dz$$

TEO DIVERGENZA

$A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $E \subset A$ dominio regolare, $F: A \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale di classe C^1. Allora:

$$\iint_{\partial E} \langle F, n^+ \rangle \, dS = \iiint_E \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$$

DIM:

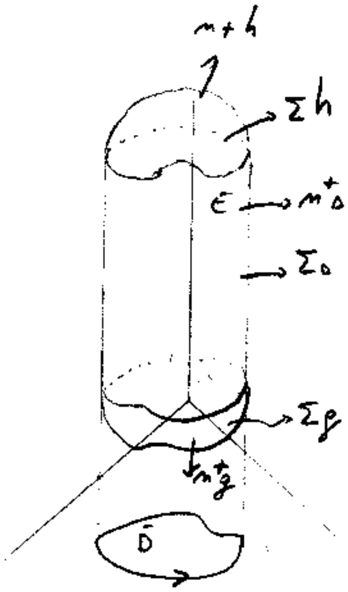
E dominio regolare $\Rightarrow E = E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_m$ $\quad E_k$ dominio regolare normale.

$\mathring{E}_k \cap \mathring{E}_j = \emptyset$ se $k \neq j$ $\Rightarrow \displaystyle\iint_{\partial E} \langle F, n^+ \rangle dS = \sum_{j=1}^{m} \iint \langle F, n_j^+ \rangle \, dS$

e anche $\Rightarrow \displaystyle\iiint_E \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \sum_{j=1}^{m} \iiint_{E_j} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$ $\Rightarrow$ basta supporre che E

sia un dominio regolare normale.

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \bar{D} \quad g(x, y) \le z \le h(x, y) \right\}$$



$\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ dominio regolare

$g, h: \bar{D} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 $\quad \partial E = \Sigma_g \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_h$

$\sigma_g(u, v) = (u, v, g(u, v)) \quad (u, v) \in \bar{D}$

$\sigma_h(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad (u, v) \in \bar{D}$

$\sigma_0(u, v) = (x(u), y(u), v) \quad u \in [a, b]$

$\quad v \in [g(\gamma(u)), h(\gamma(u))]$

con $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ curva semplice chiusa regolare a tratti t.c. $|\gamma| = \partial D$ orientata positivamente $\quad \gamma(u) = (x(u), y(u))$, $\quad u \in [a, b]$

$$n^+g = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, -1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2}} \qquad n^+h = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}} \qquad n^+_0 = \frac{(y'(u), -x'(u), 0)}{\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}}$$

$\underline{F} = (P, Q, R)$

$$\iint_{\partial E} \langle \underline{F}, n^+ \rangle dS = \iint_{\partial E} (P n^+_x + Q n^+_y + R n^+_z)\, dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_{\partial E} P n^+_x \, dS = \iint_{\Sigma_g} P n^+_x \, dS + \iint_{\Sigma_D} P n^+_x \, dS + \iint_{\Sigma_h} P n^+_x \, dS =$$

$$= \iint_D P(u, v, g(u,v)) \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\, du\, dv + \int_a^b du \int_{g(\gamma(u))}^{h(\gamma(u))} dv \; P(x(u), y(u), v)\, y'(u) +$$

$$- \iint_D P(u, v, h(u,v)) \frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\, du\, dv .$$

$$\iiint_E \operatorname{div} \underline{F} \, dx\,dy\,dz = \iiint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$$

derivazione sotto integrale

E normale

$$\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\, dz =$$

$$= \iint_D dx\,dy \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} P(x,y,z)\, dz - P(x,y,h(x,y)) \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + P(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right] =$$

$$= \text{GAUSS-GREEN} = \int_{+\partial D} \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} P(x,y,z)\, dz \right] dy - \iint_D dx\,dy\, P(x,y,h(x,y)) \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) +$$

$$+ \iint dx\,dy\; P(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \int_a^b du \left[\int_{g(\gamma(u))}^{h(\gamma(u))} P(x(u), y(u), v)\, dv \right] y'(u) - \iint_D du\,dv\, P(u,v,h(u,v)) \frac{\partial h}{\partial u}$$

$+ \dots$

2] $\underline{F} = (P, Q, R) : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Campo Vettoriale C^1, il <u>rotore</u> di F è il campo vettoriale

$$\text{rot } \underline{F} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

F è irrotazionale se e solo se $\iff \text{rot } \underline{F} = 0$

TEO. DI STOKES

$A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $\underline{F} : A \to \mathbb{R}^3$ C^1 $\quad \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \Sigma_n \subset A$

superficie composta orientabile t.c.:

Σ_j abbia una parametrizzazione $\sigma_j : \bar{D}_j \to \mathbb{R}^3$ di C^2 con $\bar{D}_j$, dominio regolare

Allora:
$$\int_{+\partial\Sigma} \langle \underline{F}, ds \rangle = \iint_{\Sigma} \langle \text{rot } \underline{F}, n^+ \rangle \, dS$$
con n^+ campo di versori positivi di Σ

dim:

$$\iint_{\Sigma} \langle \text{rot } \underline{F}, \underline{n}^+ \rangle \, dS = \sum_{k=1}^{n} \iint_{\Sigma_k} \langle \text{rot } \underline{F}, \underline{n}^+_k \rangle \, dS$$

$$\iint_{+\partial\Sigma} \langle \underline{F}, ds \rangle = \sum_{k=1}^{n} \int_{+\partial\Sigma_k} \langle \underline{F}, ds \rangle$$

basta supporre Σ superficie elementare con parametrizzazione $\sigma : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ di classe C^2, $\bar{D}$ dominio regolare in $\mathbb{R}^2$. $\quad \partial D = |\gamma_0| \quad \sigma = (\xi, \eta, \zeta)$

$\gamma_D : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ curva chiusa semplice e regolare a tratti.

$$\partial\Sigma = |\gamma| \quad \text{con} \quad \gamma(t) = \sigma(\gamma_0(t))$$

$$\int_{+\partial\Sigma} \langle \underline{F}, ds \rangle = \int_{+\partial\Sigma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$\int_{+\partial\Sigma} P\,dx = \int_a^b P\left(\sigma(\gamma_0(t))\right)\frac{d}{dt}\,\xi(\gamma_0(t))\,dt =$$

$$= \int_a^b P\circ\sigma(u(t),v(t))\left[\frac{\partial\xi}{\partial u}(u(t),v(t))\,u'(t) + \frac{\partial\xi}{\partial v}(u(t),v(t))\,v'(t)\right]dt =$$

$$= \int_{+\partial D} (P\circ\sigma)\frac{\partial\xi}{\partial u}\,du + (P\circ\sigma)\frac{\partial\xi}{\partial v}\,dv \overset{G.G.}{=} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left((P\circ\sigma)\frac{\partial\xi}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((P\circ\sigma)\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)\right]du\,dv =$$

$$= \iint_D \left[\left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial u}} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)\frac{\partial\xi}{\partial v} + \cancel{(P\circ\sigma)\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}} - \left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial v}} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)\frac{\partial\xi}{\partial u}\right.$$

$$\left. - \cancel{(P\circ\sigma)\frac{\partial^2\xi}{\partial v\partial u}}\right]du\,dv = \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)\right]du\,dv$$

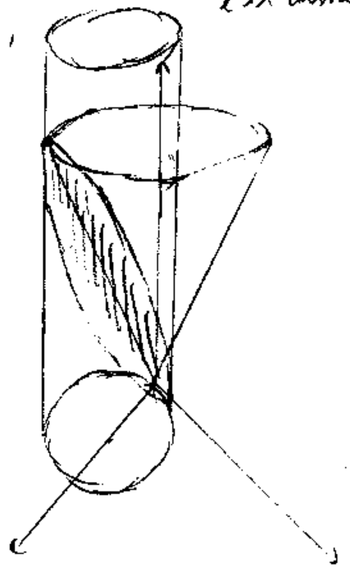
$$= \int_{+\partial\Sigma} P\,dx$$

1| 12/11/19

$\Sigma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=0 \ , x^2+y^2 \leq 2x , \ z \geq 0 \}$

$\downarrow$ $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $\downarrow$ $(x-1)^2+y^2 \leq 1$

la parte tra il cono e il cilindro



Σ sup. cartesiana $z = \sqrt{x^2+y^2}$

$(x,y) \in D \quad D = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2x \}$

$$\| \sigma_x \times \sigma_y \| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} =$$

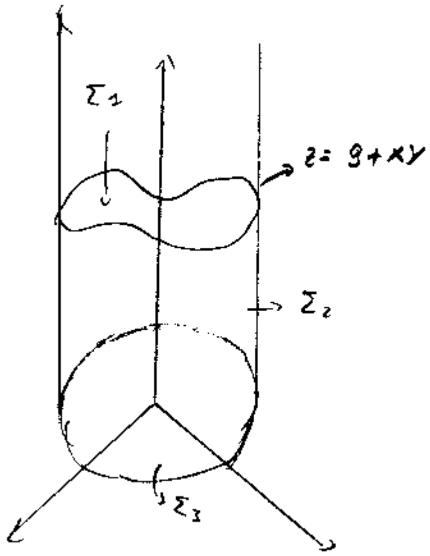
$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

circonferenza di raggio 1

$$A(\Sigma) = \iint_D \| \sigma_x \times \sigma_y \| \, dx dy = \sqrt{2} \, |D| = \pi \sqrt{2}$$

$D = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1 , \ 0 \leq z \leq 9 + xy \}$

$A(\partial D) = ?$



$|xy| = |\rho^2 \cos\theta \sin\theta|$

$\leq \rho^2 \leq 1$

$x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow xy > -1$

$\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$

$A(\Sigma_3) = \pi$ circonferenza di raggio 1

Σ_1 superficie cartesiana $z = 9 + xy$ su $E = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1 \}$

$$\| \sigma_x \times \sigma_y \| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

$$A(\Sigma_1) = \iint_E \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \overset{C.P.}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\, \rho\sqrt{1+\rho^2} = (t = 1+\rho^2) = \frac{1}{2}\, 2\pi \int_1^2 dt\, t^{1/2} =$$

$$= \pi\, \frac{2}{3}\, t^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad 0 \le z \le 9 + \sin\theta\cos\theta$$

$$\Updownarrow$$

$$\Sigma_2 : \sigma_2(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) \qquad E_2 = \{(\theta, z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 9+\sin\theta\cos\theta\}$$

$$\|\sigma_{2,\theta} \times \sigma_{2,z}\| = \left\|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = \|(\cos\theta, \sin\theta, 0)\| = 1$$

$$A(\Sigma_2) = \iint_{E_2} 1\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{9+\sin\theta\cos\theta} dz = \int_0^{2\pi} d\theta\,(9+\sin\theta\cos\theta) = 18\pi$$

$$A(\partial D) = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) + 18\pi + \pi$$

$$F(x,y,z) = (xy,\ x-y,\ yz)$$

normale rispetto a z

flusso uscente da $E = \{(x,y,z) \mid (x-z)^2 + (y+z)^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 1\}$

$$\iint_{\partial E} \langle \underline{F}, \underline{n}^+ \rangle = \iiint_E (\operatorname{div} F)\, dx\,dy\,dz$$

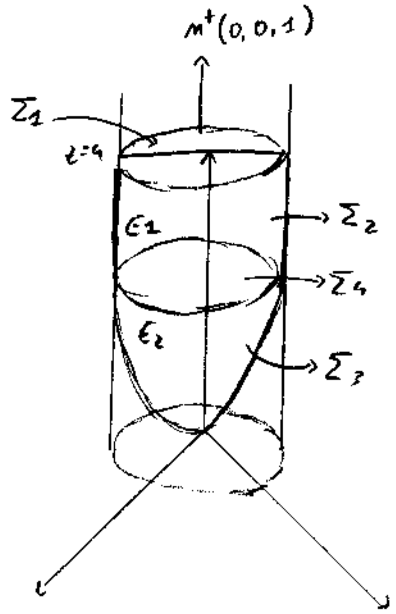
$$\operatorname{div} F = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(x-y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = 2y-1$$

$$\iiint_E (2y-1)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{E_z} (2y-1)\,dx\,dy \qquad E_z = \{(x,y) \mid (x-z)^2 + (y+z)^2 \le z^2\}$$

2| Coordinate polari centrate in $(2,-2)$

$$\begin{cases} x = 2 + \rho\cos\theta \\ y = -2 + \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho\ \rho(-2z + 2\rho\sin\theta - 1) = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta = 0\right) =$$

$$= -2\pi \int_0^1 dz \int_0^2 d\rho\,(2z\rho + \rho) = -2\pi \int_0^1 dz\ \left(z^3 + \frac{z^2}{2}\right) = -2\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$$



$F(x,y,z) = (x, 0, 0)$

$E = \{(x,y,z) \mid z \le 4,\ x^2+y^2 \le z,\ x^2+y^2 \le 1\}$

(a) flusso di F uscente da E $\quad \operatorname{div} F = 1$

$$\iint_{\partial E} \langle F, n^+\rangle\, dS = \iiint_E (\operatorname{div} F)\, dx\,dy\,dz = |E| = |E_1| + |E_2| =$$

$$= 3\pi + |E_2| \overset{*}{=} \frac{7\pi}{2} \qquad E_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1,\ x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

normale rispetto (x,y)

$$|E_2| \overset{c.c.}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\, \rho \int_{\rho^2}^1 dz = 2\pi \int_0^1 d\rho\, \rho(1-\rho^2) = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \ *$$

(b) flusso uscente da Σ_1, Σ_2 e Σ_3

$$\iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1^+\rangle\, dS = 0 \quad n_1^+ = (0,0,1) \qquad \iint_{\partial E_1} \langle F, n^+\rangle\, dS = \iiint_{E_1} \operatorname{div} F\, dx\,dy\,dz \Downarrow |E_1| = 3\pi$$

$$\underbrace{\iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1^+\rangle\, ds}_{0} + \underbrace{\iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2^+\rangle\, ds}_{!} + \overbrace{\iint_{\Sigma_4} \langle F, n_4^+\rangle\, ds}^{0} \qquad n_4^+ = (0,0,-1)$$

$$\iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2^+\rangle\, ds = 3\pi \qquad \iint_{\Sigma_3} \langle F, n_3^+\rangle\, ds = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{\partial E_2} \langle F, n^+ \rangle \, ds = \iiint_{E_2} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = |E_2| = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{\Sigma_3} \langle F, n_3^+ \rangle \, ds - \underbrace{\iint_{\Sigma_4} \langle F, n_4^+ \rangle \, ds}_{0} \to \iint_{\Sigma_3} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

(c) $A(\Sigma_1) = \pi$ $\qquad A(\Sigma_2) = 3 \cdot 2\pi = 6\pi$

Σ_3 : sup. cartesiana $z = x^2 + y^2$ su $D_3 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

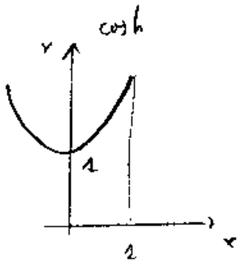
$$A(\Sigma) = \iint_{D_3} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx\,dy \overset{c.p.}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \, \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} = \quad \begin{matrix} t = 1 + 4\rho^2 \\ dt = 8\rho \, d\rho \end{matrix} \quad =$$

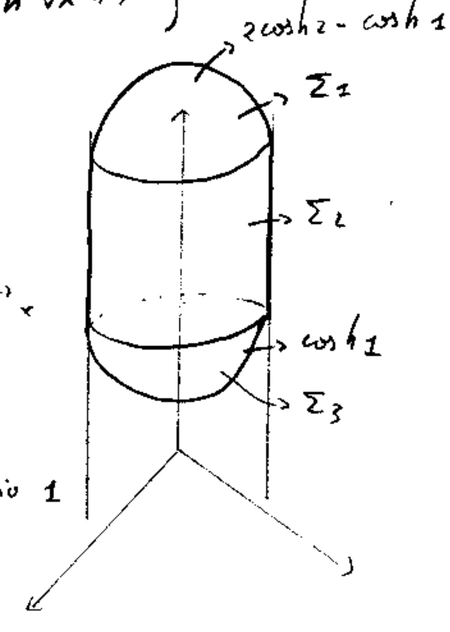
$$= \frac{\pi}{4} \int_1^5 dt \, t^{1/2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \left(5^{3/2} - 1\right) = \frac{\pi}{6} \left(5^{3/2} - 1\right)$$

$$F(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{x^2+y^2}, (x+y) \sinh \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$E = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le 1, \ \cosh \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\cosh 2 - \cosh \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

(a) $A(\partial D)$





$2\cosh h - \cosh 1 > \cosh 1 \iff \cosh 2 > \cosh 1$

$A(\partial D) = A(\Sigma_1) + A(\Sigma_2) + A(\Sigma_3)$

Σ_1 cilindro di altezza $(2\cosh 2 - \cosh 1 - \cosh 1)$ e raggio 1

$A(\Sigma_2) = 4\pi(\cosh 2 - \cosh 1)$

$A(\Sigma_3) = A(\Sigma_1)$

3] Σ_1 sup cartesiana $z = \cosh\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$

$$A(\Sigma_1) = \iint_{D_1} \left[1 + \left(\sinh\sqrt{x^2+y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + \left(\sinh\sqrt{x^2+y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 \right]^{1/2} dx\,dy$$

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$$A(\Sigma_1) = \iint_{D_1} \left(1 + \sinh^2\sqrt{x^2+y^2} \right)^{1/2} dx\,dy = \iint_{D_1} \cosh\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\, \rho \cosh\rho =$$

$$= 2\pi \left(\rho \sinh\rho \Big|_0^1 - \int_0^1 \sinh\rho\, d\rho \right) = 2\pi \left(\sinh(1) - \cosh(1) + 1 \right)$$

(b) flusso di F uscente da E

$$\operatorname{div} F = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\iint_{\partial E} \langle F, n^+ \rangle dS = \iiint_E \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy\,dz = \underbrace{\iiint_E \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy\,dz}_{0 \text{ dispari in } x} + \underbrace{\iiint_E \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy\,dz}_{0 \text{ dispari in } y}$$

(c) $$\iint_{\Sigma_1} \langle F, n^+ \rangle dS = \iint_{D_1} \left[\cancel{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x \sinh\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} + \cancel{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y \sinh\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} + (x+y)\sinh\sqrt{x^2+y^2} \right] dx\,dy$$

$$n_1^+ = \frac{\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\left(-\frac{x\sinh(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y\sinh(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)}{\cdots} \qquad = 0$$

$$\iint_{\Sigma_3} \langle F, n^+ \rangle dS = 0 \qquad n_3^+ = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)$$

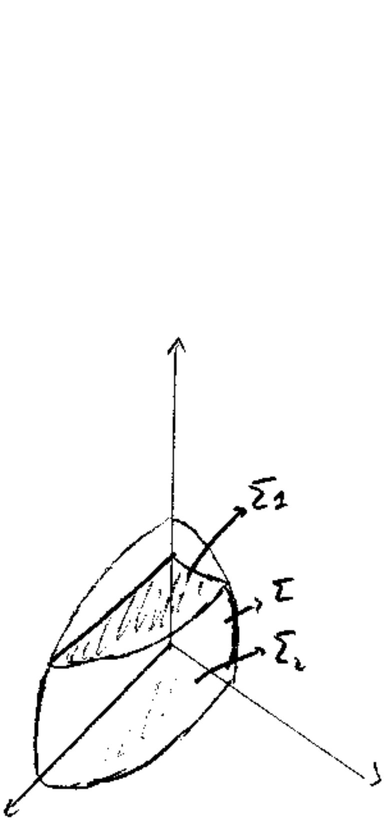
$\Sigma_2 : \sigma_2(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ $\quad u \in [0, 2\pi]$

$\quad v \in [\cosh z, 2\cosh z - \cosh z]$

$\sigma_{2u} \times \sigma_{2v} = (\cos u, \sin u, 0)$

$$\iint_{\Sigma_2} \langle F, n^+ \rangle dS = \int_0^{2\pi} du \int_{\cosh z}^{2\cosh z - \cosh z} dv \, (1 \cdot \cos u + 1 \sin u) = 0$$

$F(x,y,z) = (y^2, 0, z)$



$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, \quad 0 \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

$E = \left\{ (x,y,z) \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 \le 1, \quad 0 \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

$\Sigma_1 = \left\{ (x,y,z) \mid z = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \le \frac{1}{4} \right\} \iff \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1$

$\Sigma_2 = \left\{ (x,y,z) \mid z = 0, \ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \le 1 \right\}$

$$\iiint_{\partial E} \langle F, n^+ \rangle dS = \iiint_E 1 \, dx\,dy\,dz = |E|$$

"

$$\iint_{\Sigma} \langle F, n^+ \rangle dS + \iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1^+ \rangle dS + \iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2^+ \rangle dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} \langle F, n^+ \rangle dS = |E| - \iint_{\Sigma_1} \langle F, n_1^+ \rangle dS - \iint_{\Sigma_2} \langle F, n_2^+ \rangle dS$$

$n_2^+ (0,0,-1) \quad \iiint_{\Sigma_2} \langle F, n_2^+ \rangle dS = -\int_{\Sigma_2} R(x,y,0)\, dx\,dy = 0$

$n_1^+ (0,0,1) \quad \iiint_{\Sigma_1} \langle F, n_1^+ \rangle dS = \frac{\sqrt{3}}{2} A(\Sigma_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} 2\pi = \sqrt{3}\pi$

$$|E| = \int_0^{\sqrt{3}/2} dz \int_{\left\{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \le 1 - z^2\right\}} dx\,dy = \int_0^{\sqrt{3}/2} dz \, \pi \left(4\sqrt{1-z^2} \cdot 2\sqrt{1-z^2}\right) = 8\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} dz \, (1 - z^2) = 8\pi \left(z - \frac{z^3}{3}\right.$$

DEF SERIE NUMERICA

Una serie numerica è il simbolo $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 \dots$ (*) $(a_k \in \mathbb{R})$

La successione $\{S_n\}$ definita da $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots a_n$

è detta la successione delle somme parziali di (*)

La serie (*) si dice convergente se $\exists$ finito $\lim_{n \to +\infty} S_n =: S$

e si scrive $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := S$ e S è detto la somma della serie (*)

La serie (*) si dice divergente se $\lim_{n \to \infty} S_n = \pm\infty$ e si pone $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := \pm\infty$

La serie (*) si dice indeterminata se $\nexists$ il limite.

Esempi:

(a) $a_k = b_k - b_{k+1}$ $\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1})$ SERIE TELESCOPICA.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = \underbrace{(b_1 - \cancel{b_2})}_{k=1} + \underbrace{(\cancel{b_2} - b_3)}_{k=2} \dots \underbrace{(b_{n-1} - \cancel{b_n})}_{k=n-1} + \underbrace{(\cancel{b_n} - b_{n+1})}_{k=n} =$$

$= b_1 - b_{n+1}$

Se $\lim_{n \to \infty} b_n = l \in [-\infty, +\infty]$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1}) = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (b_1 - b_{n+1}) =$

- $l \in (-\infty, +\infty)$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1})$ È CONVERGENTE
- $l = \pm\infty$ $\Rightarrow$ " ——— " È DIVERGENTE
- $\nexists \lim_{n \to \infty} b_n$ $\Rightarrow$ " ——— " È INDETERMINATA

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k} \Rightarrow \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = b_1 - l = 1 \qquad b_n = \frac{1}{n} \to 0_{n\to\infty}$$

$b_1 = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} [\log k - \log(k+1)] = -\infty \qquad b_k = \log(k) \underset{k\to+\infty}{\to +\infty}$$

(b) SERIE GEOMETRICHE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad x \in \mathbb{R} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \underbrace{1 + x + x^2 \ldots + x^n}_{n+1 \text{ termini}}$$

moltiplico per $(1-x) \Rightarrow S_n(1-x) = (1-x)(1+x+x^2\ldots x^n) = 1 + \cancel{x} \ldots + \cancel{x^n} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - x^3 \ldots - x^{n+1}$

$$\Rightarrow S_n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1 \\ n+1 & x = 1 \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & |x|<1 \\ +\infty & x \geq 1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ +\infty & x>1 \\ \nexists & x=-1 \\ \nexists & x<-1 \end{cases}$$

$x = -|x| \Rightarrow x^{n+1} = (-1)^{n+1}|x|^{n+1}$

$$\Downarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{se} \quad |x|<1$$

— " — div. a $+\infty$ se $x \geq 1$

— " — indet. se $x \leq -1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x} \quad \text{se } |x|<1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = 1 + x^2 + x^4 \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (x^2)^k = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{se } x^2 < 1 \iff |x|<1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k+1} = x \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = \frac{x}{1-x^2} \quad |x|<1$$